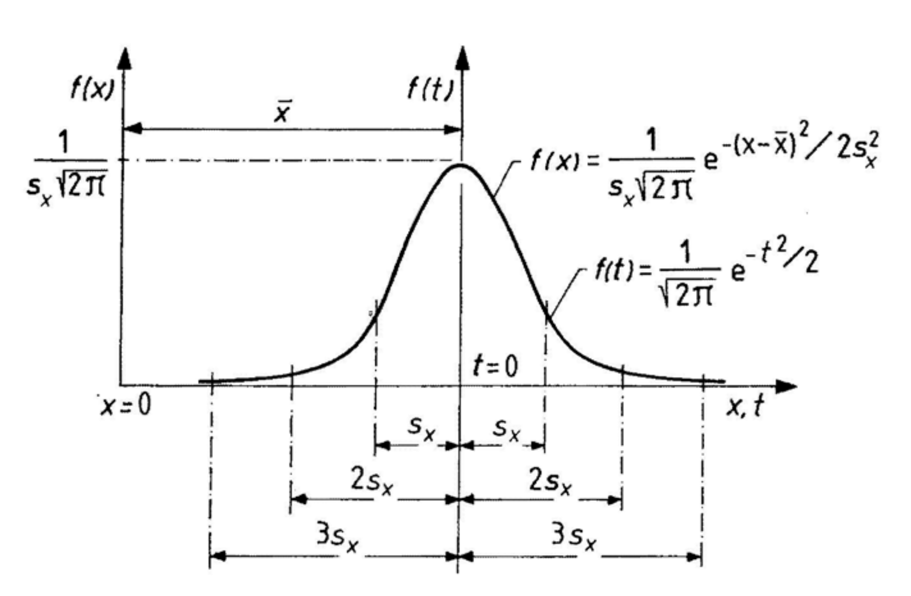
1.1 Rozkład normalny

Rozkład normalny jest najczęściej stosowany w zastosowaniach technicznych i rachunku prawdopodobieństwa.



Rys. 1.7. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego $N(\bar{x}, s_x)$ i $N(0, 1)$

Wiele zjawisk fizycznych, choć nie podlega ściśle rozkładowi normalnemu, można po odpowiedniej transformacji aproksymować za jego pomocą.

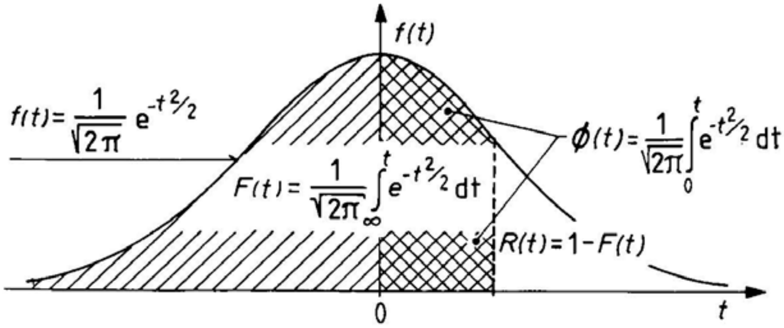
Istotną cechą rozkładu normalnego: **każda liniowa kombinacja niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych jest również zmienną losową o rozkładzie normalnym.**

Rozkład normalny o parametrach wartości średniej $\overline{x}$ i odchyleniu standardowym s_x oznacza się $N\left(\overline{x}, s_x\right)$.

Gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$ zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N\left(\overline{x}, s_x\right)$ jest określona wzorem

$$f\left(x\right) = \frac{1}{s_x\sqrt{2\pi}} e^{-\left(x-\overline{x}\right)^2/2s_x^2} \qquad (1)$$

Tablica 1.2. Wartości funkcji rozkładu normalnego



t	$f(t)$	$F(t)$	$R(t)$	$2R(t)$
0,0	0,398 942	0,500 000	0,500 000	1,000 000
0,1	0,396 952	0,539 827	0,460 173	0,920 344
0,2	0,391 043	0,579 260	0,420 740	0,841 481
0,3	0,381 388	0,617 911	0,382 089	0,764 177
0,4	0,368 270	0,655 422	0,344 578	0,689 156
0,5	0,352 065	0,691 465	0,308 535	0,617 075
0,6	0,333 225	0,725 747	0,274 253	0,548 506
0,7	0,312 254	0,758 036	0,241 964	0,483 927
0,8	0,289 692	0,788 145	0,211 855	0,423 711
0,9	0,266 085	0,815 940	0,184 060	0,368 110
1,0	0,241 971	0,841 345	0,158 655	0,317 311
1,1	0,217 852	0,864 334	0,135 666	0,271 332

1,0	0,241 971	0,841 345	0,158 655	0,317 311
1,1	0,217 852	0,864 334	0,135 666	0,271 332
1,2	0,194 186	0,884 930	0,115 070	0,230 139
1,3	0,171 369	0,903 195	0,096 805	0,193 601
1,4	0,149 727	0,919 243	0,080 757	0,161 513
1,5	0,129 518	0,933 193	0,066 807	0,133 614
1,6	0,110 921	0,945 201	0,054 799	0,109 599
1,7	0,094 049	0,955 435	0,044 565	0,089 131
1,8	0,078 950	0,964 069	0,035 931	0,071 861
1,9	0,065 616	0,971 284	0,028 716	0,057 433
2,0	0,053 991	0,977 250	0,022 750	0,045 500
2,1	0,043 984	0,982 136	0,017 864	0,035 729
2,2	0,035 475	0,986 097	0,013 903	0,027 807
2,3	0,028 327	0,989 276	0,010 724	0,021 548
2,4	0,022 395	0,991 803	0,008 197	0,016 395
2,5	0,017 528	0,993 791	0,006 209	0,012 419
2,6	0,013 583	0,995 339	0,004 661	0,009 322
2,7	0,010 421	0,996 533	0,003 467	0,006 934
2,8	0,007 915	0,997 495	0,002 505	0,005 110
2,9	0,005 952	0,998 134	0,001 866	0,003 732
3,0	0,004 432	0,998 650	0,001 350	0,002 700
3,5	0,000 873	0,999 768	0,000 232	0,000 465
4,0	0,000 134	0,999 968	0,000 032	0,000 063
4,5	0,000 016	0,999 996	0,000 004	0,000 008
5,0	0,000 001 5	0,999 999 7	0,000 000 3	0,000 000 6

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że $x < x_1$ otrzymuje się przez scałkowanie rozkładu normalnego w granicach od $-\infty$ do x_1

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{1}{s_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-(x-\bar{x})^2/2s_x^2}\,dx \qquad (2)$$

Rozważana funkcja rozkładu normalnego $N(\bar{x}, s_x)$ nie jest elementarna, więc całkowanie nie jest proste.

Dlatego też korzysta się z tablic rozkładu normalnego – należy dokonać standaryzacji zmiennej losowej.

Standaryzacja rozkładu normalnego jest transformacją rozkładu $N(\bar{x}, s_x)$ na rozkład normalny standaryzowany $N(0,1)$ i polega na przekształceniu zmiennej losowej x o wartości oczekiwanej $\bar{x}$ oraz odchyleniu standardowym s_x do zmiennej losowej t o wartości oczekiwanej $t = 0$ oraz odchyleniu standardowym $s_t = 1$.

Przekształcenie to należy interpretować jako zmianę punktu zerowego zmiennej losowej (przez odjęcie wartości średniej) i zmianę jednostki skali (w wyniku podzielenia przez odchylenie standardowe).

Gęstość prawdopodobieństwa dla standaryzowanej zmiennej losowej

$$t = \frac{x - \overline{x}}{s_x} \tag{3}$$

wyznacza się ze wzoru

$$f\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \tag{4}$$

Dystrybuanta $F(t)$ rozkładu normalnego standaryzowanego $N\left(0,1\right)$, dla $t=0$ i $s_t=1$, wynosi

$$F\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x_1} e^{-t^2/2}dt \tag{5}$$

lub w postaci równoważnej

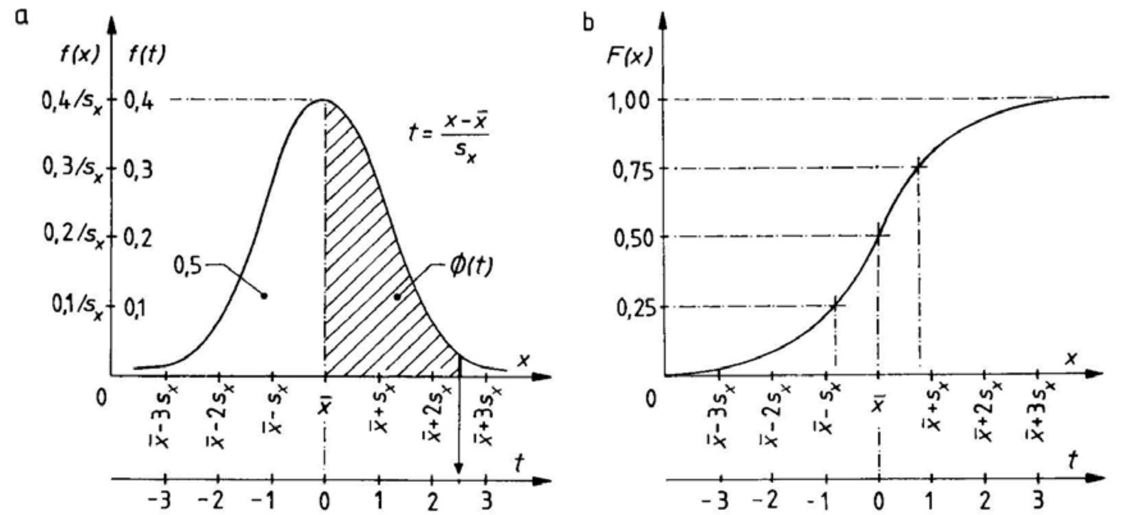
$$F\left(t\right)=0,5+\phi\left(t\right) \tag{6}$$

gdzie $\phi\left(t\right)$ jest całką błędów (nazywaną funkcją Laplace'a), opisaną wzorem

$$\phi\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x_1} e^{-t^2/2}dt \tag{7}$$

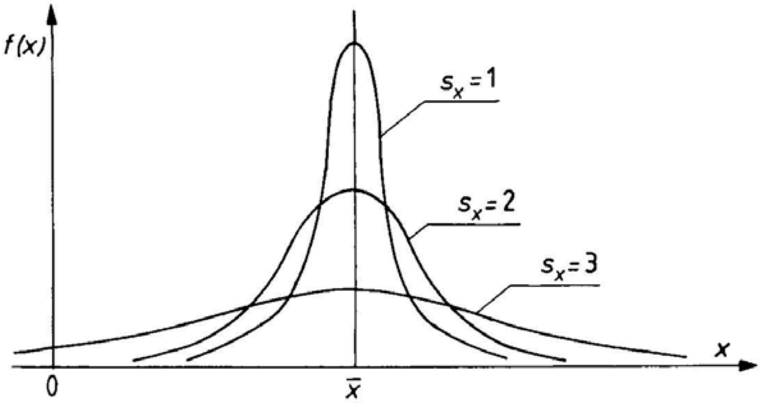
Tablice wartości dystrybuanty czy też gęstości sporządza się tylko dla rozkładu zmiennej losowej standaryzowanej.

Na rys. 1.8 pokazano wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ i $f(t)$ oraz dystrybuanty $F(x)$ i $F(t)$ standaryzowanego rozkładu normalnego



Rys. 1.8. Gęstość prawdopodobieństwa (a) i dystrybuanta (b) standaryzowanego rozkładu normalnego

Wpływ parametru s_x - odchylenia standardowego na gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego ilustruje rys. 1.9.



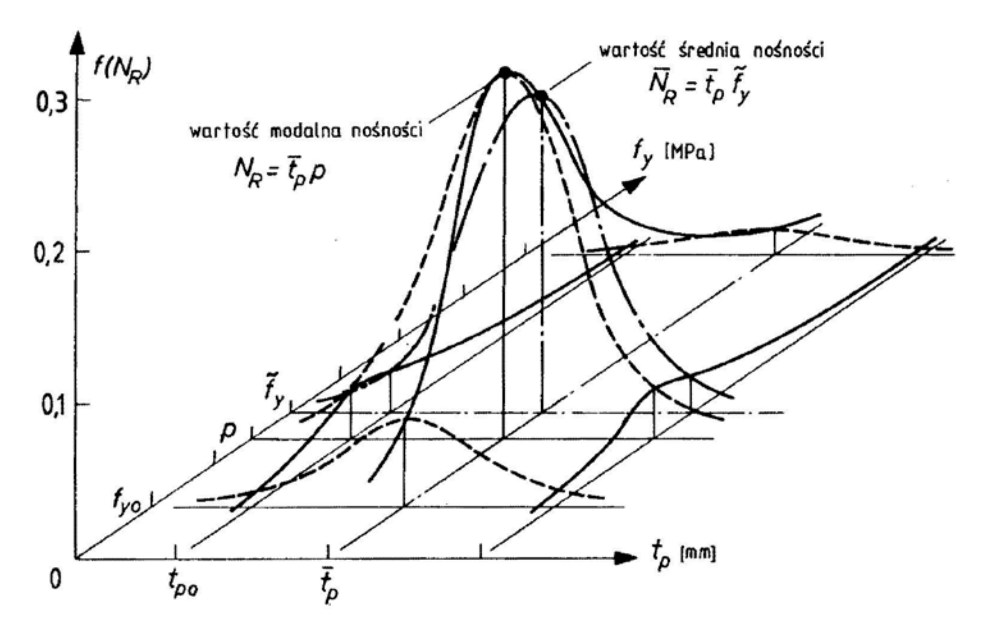
Rys. 1.9. Wpływ odchylenia standardowego na gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego

Badane cechy jednostek populacji (na przykład wytrzymałość materiału, nośność elementu) charakteryzujące się dużym rozrzutem mają "spłaszczone" rozkłady prawdopodobieństwa.

W przypadku zaś małej wartości odchylenia standardowego s_x rozkłady gęstości prawdopodobieństwa są "strome".

1.2 Kombinacja niezależnych zmiennych losowych normalnych

Modelem populacji ogólnej badanej ze względu na dwie lub więcej cech jest zmienna losowa wielowymiarowa.



Rys. 3.16. Dwuwymiarowa funkcja gęstości losowej nośności stalowych zbiorników [13]

Między zmiennymi losowymi może zachodzić zależność: jedna ze zmiennych losowych reaguje zmianą swego rozkładu na zmianę drugiej zmiennej.

Podstawowymi pojęciami służącymi do analizy zależności między zmiennymi losowymi są korelacja i regresja.

Korelacja wyraża stopień zależności między zmiennymi losowymi (siłę zależności), **regresja** jest funkcyjnym odzwierciedleniem tej zależności (jej kształtem).

Korelacja liniowa to zależność, przy której stałym przyrostom wartości jednej zmiennej losowej towarzyszą stałe przyrosty (dodatnie lub ujemne) wartości oczekiwanych drugiej zmiennej.

Miarą liniowej korelacji zmiennych losowych x, y jest **współczynnik korelacji** liniowej ρ_{xy}.

Współczynnik korelacji liniowej próby ρ_{xy} na podstawie badań z *n* par wyników

$$(x_1, y_1),(x_2, y_2),...,(x_i, y_i), \dots ,(x_n, y_n) \tag{8}$$

oblicza się według wzoru

$$\rho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} \tag{9}$$

gdzie:

x_i, y_i – *i-te* wyniki badania próby,

$\overline{x}$, $\overline{y}$ –wartości średnie zmiennych losowych.

Współczynnik korelacji liniowej ρ_{xy} przyjmuje wartości

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \tag{10}$$

Gdy współczynnik korelacji $\rho_{xy} = -1$ lub $\rho_{xy} = 1$, wtedy między zmiennymi losowymi *x* i *y* istnieje ścisła zależność w postaci funkcji liniowej.

Jeśli współczynnik korelacji $\rho_{xy} = 0$, to między zmiennymi nie zachodzi korelacja liniowa (są nieskorelowane).

Im współczynnik korelacji $\left|\rho_{xy}\right|$ jest bliższy 1, tym korelacja jest mocniejsza.

Zmienne niezależne w sensie probabilistycznym są zawsze nieskorelowane, natomiast zmienne nieskorelowane nie muszą być niezależne (chyba że ich rozkład dwuwymiarowy jest normalny).

Rozpatruje się zmienne losowe $x(\omega)$ oraz $y(\omega)$ o rozkładach normalnych, które są probabilistycznie niezależne.

Istotna właściwość rozkładu normalnego: **każda liniowa kombinacja oraz suma i różnica dwóch (a w konsekwencji dowolnej skończonej liczby) niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych ma również rozkład normalny.**

Dwuskładnikowa suma lub różnica niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych $x(\omega)$ (o parametrach $\overline{x}$ *i* s_x*)* oraz $y(\omega)$ (o parametrach $\overline{y}$, s_y*)* daje w rezultacie nową zmienną losową $z(\omega)$, o rozkładzie normalnym i parametrach wartości średniej $\overline{z}$ i odchylenia standardowego s_z.

Parametry zmiennej losowej $z(\omega)$ sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych $x(\omega)$ i $y(\omega)$ o rozkładach normalnych opisują wzory

$$z(\omega) = x(\omega) + y(\omega) \tag{11}$$

$$\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} \tag{12}$$

$$s_z = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \tag{13}$$

$$v_z = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\overline{x} + \overline{y}} \tag{14}$$

Parametry zmiennej losowej $z(\omega)$ różnicy dwóch niezależnych zmiennych losowych $x(\omega)$ i $y(\omega)$ o rozkładach normalnych opisują wzory

$$z(\omega) = x(\omega) - y(\omega) \tag{15}$$

$$\overline{z} = \overline{x} - \overline{y} \tag{16}$$

$$s_z = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \tag{17}$$

$$v_z = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\overline{x} - \overline{y}} \tag{18}$$

Należy zauważyć, iż odchylenie standardowe s_z zmiennej losowej $z(\omega)$, niezależnie, czy dotyczy to sumowania, czy też odejmowania, jest zawsze większe od odchyleń składowych s_x i s_y.

W przypadku iloczynu lub ilorazu zmiennych losowych $x(\omega)$ oraz $y(\omega)$, o rozkładach normalnych nowa zmienna losowa $z(\omega)$ ma rozkład niesymetryczny.
Aproksymacja za pomocą rozkładu normalnego iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych $x(\omega)$ i $y(\omega)$ o rozkładach normalnych:

$$z(\omega) = x(\omega)\, y(\omega) \tag{19}$$

$$\overline{z} = \overline{xy} \tag{20}$$

$$s_z = \sqrt{\overline{x}^2 s_y^2 + s_x^2 s_y^2 + \overline{y}^2 s_x^2} \tag{21}$$

$$v_z = \sqrt{v_x^2 + v_x^2 v_y^2 + v_y^2} \tag{22}$$

gdzie

$$v_x = \frac{s_x}{\overline{x}} \qquad v_y = \frac{s_y}{\overline{y}} \tag{23}$$

Iloraz dwóch niezależnych zmiennych losowych $x(\omega)$ i $y(\omega)$

$$z(\omega) = \frac{x(\omega)}{y(\omega)} \tag{24}$$

$$\overline{z} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \tag{25}$$

$$s_z = \frac{1}{\overline{y}} \sqrt{\frac{\overline{x}^2 s_y^2 + \overline{y}^2 s_x^2}{\overline{y}^2 s_y^2}} \tag{26}$$

$$\nu_z = \sqrt{\frac{\nu_x^2 + \nu s_y^2}{1 + \nu_y^2}} \tag{27}$$

gdzie

$$\nu_x = \frac{s_x}{\overline{x}} \qquad \nu_y = \frac{s_y}{\overline{y}} \tag{28}$$

Należy nadmienić, że w przypadku iloczynu oraz ilorazu zmiennych losowych $x(\omega)$ i $y(\omega)$ należy w zasadzie rozważyć zastosowanie lepszych aproksymacji $z(\omega)$ na przykład za pomocą rozkładów logarytmiczno-normalnych.

Odchylenie standardowe s_z zmiennej losowej $z(\omega)$ jest zawsze większe od odchyleń składowych zmiennych losowych s_x i s_y.

Szacowania wartości obliczeniowych analizowanych wielkości x_0, o parametrach $\overline{x}$ i s_x wyznacza się jako kwantyle dla argumentu *t* rozkładu ze wzoru

$$x_0 = \overline{x} \pm t s_x \tag{29}$$

Argument *t* rozkładu przyjmuje się w zależności od założonego prawdopodobieństwa ryzyka i dokładności oceny oszacowania badanej wielkości.

Żądana dokładność oszacowania analizowanego parametru ma związek z liczebnością próby *n*.

Eurokod 3 proponuje w przypadku doświadczalnego wyznaczania nośności charakterystycznej x_k konstrukcji stosować wzory

$$x_k = \overline{x} - t s_{xe} \tag{30}$$

gdzie

$$s_{xe} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \tag{31}$$

w których

n – liczebność próby,

x_i – i-ty wynik badania próbki (i-ta obserwacja),

$\overline{x}$ – wartość średnia próby.

Argument rozkładu *t* należy przyjmować według tabl. 1.3 w zależności od liczebności próby *n*.

Tablica 1.3. Wartości argumentu rozkładu *t* w zależności od liczebności próby *n*

n	4	5	6	8	10	20	30	∞
t	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Przykład 1.1

Aproksymować za pomocą rozkładu normalnego parametry prostokątnego pola przekroju poprzecznego belki drewnianej $\bar{A}$ i s_A

Z badań statystycznych wymiarów poprzecznych belek drewnianych otrzymano następujące parametry

losowej wysokości: $\bar{h} = 100\,\text{mm}$ i $s_h = 3\,\text{mm}$ oraz

losowej szerokości: $\bar{b} = 60\,\text{mm}$ i $s_b = 2\,\text{mm}$ (założono, iż zmienne losowe $h(\omega)$ i $b(\omega)$ mają rozkład normalny).

Średnie pole przekroju poprzecznego belki i jego odchylenie standardowe wynoszą

$$\overline{A} = \overline{hb} = 100 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2$$

$$s_z = \sqrt{\overline{h}^2 s_b^2 + s_h^2 s_b^2 + \overline{b}^2 s_h^2} = \sqrt{10^2 \cdot 0,2^2 + 0,2^2 \cdot 0,3^2 + 6^2 \cdot 0,3^2} =$$

$$= 2,69 \text{ cm}^2$$

W analizowanym przykładzie współczynniki zmienności wysokości, szerokości i pola przekroju poprzecznego belki wynoszą

$$\nu_h = s_h / \overline{h} = 3/100 = 0,03$$

$$\nu_b = s_b / \overline{b} = 2/60 = 0,033$$

$$\nu_A = s_Z / \overline{A} = 2,69/60 = 0,0448$$

Tak więc współczynnik zmienności pola przekroju poprzecznego belki $\nu_A > \left(\nu_h, \nu_b\right)$.

Przykład 1.2

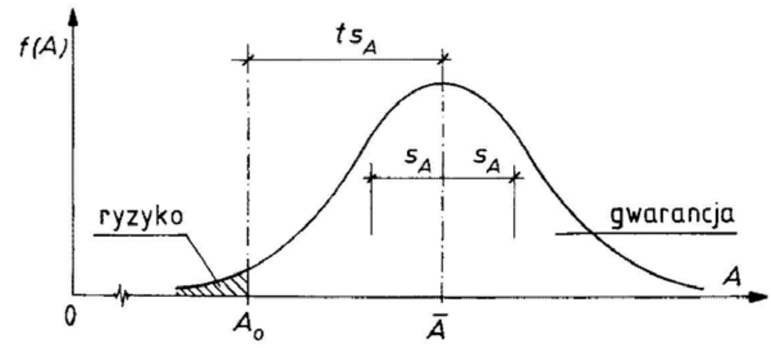
Dla danych z przykładu 1.1 należy wyznaczyć obliczeniowe pole przekroju poprzecznego A_0, aby prawdopodobieństwo wystąpienia przekroju mniejszego niż A_0 nie przekraczało 0,01 (bezpieczeństwo 0,99).

Z tablic rozkładu normalnego (tabl. 1.2) odczytano, że wartość dystrybuanty 0,99 występuje dla t = 2,3.
Kwantyl A_0 wyznaczony wynosi

$$A_0 = \overline{A} - t s_A = 60 - 2,3 \cdot 2,69 = 53,813 \text{ cm}^2$$

Tak więc, aby prawdopodobieństwo wystąpienia mniejszego przekroju poprzecznego analizowanej belki nie przekroczyło 1 %, należy przyjąć do obliczeń A_0 = 53,813 cm^2, to jest pole przekroju mniejsze od wartości średniej o 10,3%.

Graficzną ilustrację przykładu 1.2 pokazano na rys. 1.10.



Rys. 1.10. Graficzna ilustracja przykładu 1.2

Przykład 1.3

Wyznaczyć parametry wskaźnika zginania $\overline{W}$ i s_W belki o przekroju prostokątnym, o losowych parametrach wysokości i szerokości podanych w przykładzie 1.1.

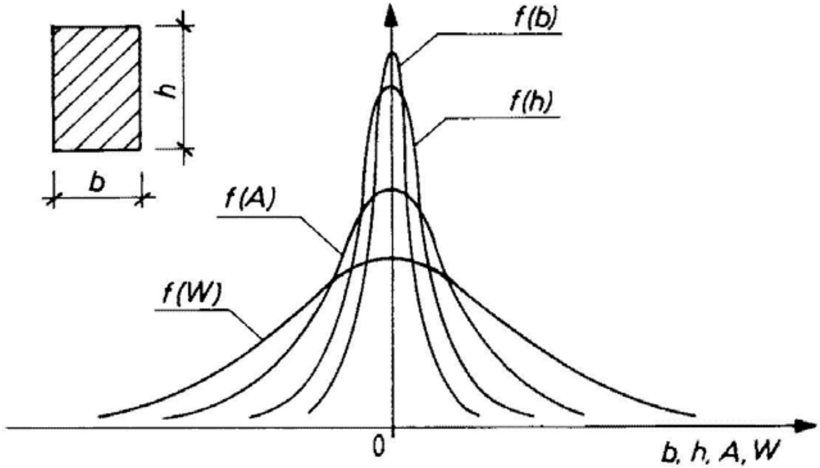
Średni wskaźnik zginania oraz odchylenie standardowe wskaźnika zginania przekroju prostokątnego wynoszą

$$\overline{W} = \frac{1}{6}\overline{b}\,\overline{h}^2 = \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 10^2 = 100\ \mathrm{cm}^3$$

$$s_z = \sqrt{\frac{1}{36}\left[\overline{h}^4 s_b^2 + 4\overline{b}^2\overline{h}^2 s_h^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{36}\left[10^4\cdot 0,2^2 + 4\cdot 6^2\cdot 10^2\cdot 0,3^2\right]} =$$

$$= 6,86\ \mathrm{cm}^3$$

Należy zauważyć, że współczynniki zmienności pomierzonych parametrów geometrycznych przekroju poprzecznego belek wynosiły $\nu_h = 0,03$, $\nu_b = 0,033$, a wskaźnika zginania przekroju - $\nu_W = 0,0686$.



Rys. 1.11. Graficzna ilustracja przykładów 1.1, 1.2 i 1.3

1.3 Estymatory zmiennych losowych

Teoria estymacji jest działem statystyki matematycznej poświęconej zagadnieniom szacowania (estymacji, oceny) nieznanych parametrów (np. wartości centralnej) badanej populacji generalnej, estymator zaś jest funkcją służącą do oceny (estymowania) nieznanego parametru populacji generalnej.

Estymacja jest więc procesem wnioskowania o numerycznych wartościach nieznanych wielkości charakteryzujących populację generalną na podstawie niekompletnych danych, takich jak próba.

Podstawowym parametrem szacującym zmienną losową jest wartość oczekiwana (centralna)

W tabl. 1.4 podano estymatory wartości centralnych c, tzn. funkcje służące do jej szacowania.

W tablicy podano też funkcje gęstości rozkładu oraz estymatory wartości centralnych dla rozkładów: N normalnego, L log-normalnego, G - Gumbela, *W* - Weibulla.

Tablica 1.4. Parametry zmiennej losowej rozkładów N, L, G i W [63]

Typ rozkładu prawdopodobieństw	Parametry rozkładu			Gęstość prawdopodobieństwa $f(x) = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$	Estymatory wartości centralnej ($c = \bar{x}, \breve{x}, \tilde{x}, \hat{x}$)
	Wartość centralna (średnia) [1] c	Odchylenie charakterystyczne (standardowe) [1] d	Współczynnik zmienności [1] δ		
N Gaussa (normalny)	$\bar{x}$	s_x	$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}$	$\frac{1}{s_x\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-\bar{x})^2}{2s_x^2}$	$\bar{x} \cong \sum_{i=1}^{n} x_i$
L log-normalny [2] (logarytmiczny)	$\breve{x}$	$\breve{x}\, v_x$	v_x	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, v_x\, x} \exp \frac{-\ln^2(x/\breve{x})}{2 v_x}$	$\breve{x} \cong \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$
G Gumbela (I rodzaju — max)	$\tilde{x}$	u_x	$u_x/\tilde{x}$	$\frac{1}{u_x} \exp\left(\frac{\tilde{x}-x}{u_x} - \exp \frac{\tilde{x}-x}{u_x}\right)$	$\tilde{x} \cong \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-x_i/u_x}\right)^{-u_x}$
W Weibulla [2] (III rodzaju — min)	$\hat{x}$	$\hat{x} v_x$	v_x	$\frac{1}{v_x\, x}\sqrt[v]{\frac{x}{\hat{x}}} \exp\left(-\sqrt[v]{\frac{x}{\hat{x}}}\right)$	$\hat{x} \cong \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt[v]{x_i}\right)^{v}$

[1] Nazwy używane bez zastrzeżeń w przypadku rozkładu Gaussa.
[2] Stosuje się, gdy wykluczone są wartości ujemne ($x \geqslant 0$).

Parametr x (dla rozkładu normalnego) jest wartością oczekiwaną, czyli średnią. Prawdopodobieństwo p nie przewyższa wartości centralnych: $\overline{x}$ i $\breve{x}$, wynosi p = 0,5 w przypadku zmiennych losowych normalnych (N oraz L).

Parametr $\tilde{x}$ rozkładu Gumbela jest wartością modalną, czyli najbardziej prawdopodobną, przy czym $p = e^{-1}$.

Centralne wartości $\hat{x}$ w rozkładzie Weibulla są kwantylami rzędu 1 – l/e.

W badaniach statystycznych, oprócz wartości centralnych, bardzo często należy oszacować wartości ekstremalne (skrajne).

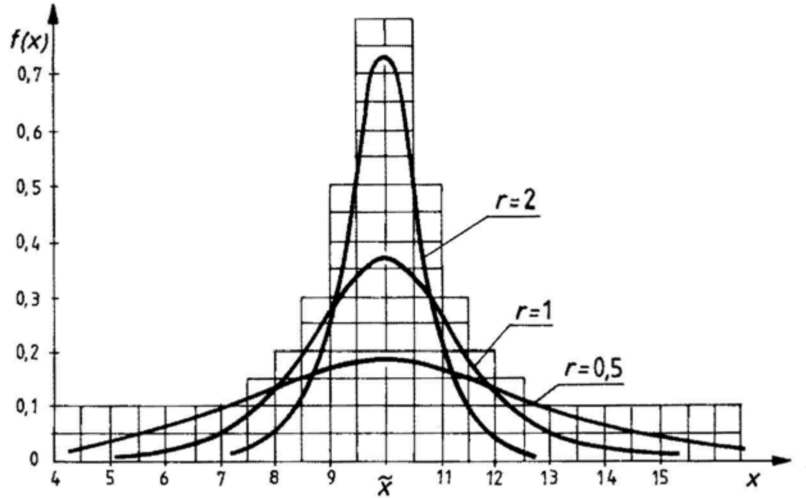
Często mierzy się wartość x_j ekstremalną w zbiorze zmiennych losowych, na przykład wytrzymałość minimalną x_{min} uszkodzonych korozyjnie elementów, lub szczytową wartość maksymalną x_{max} obciążeń wskazywanych przez urządzenia pomiarowe w określonym przedziale czasu (obciążenie wiatrem).

Wartości skrajne x_{min} oraz x_{max} nie stabilizują się w kolejnych próbach (wraz ze wzrostem liczebności n_i), tak jak jest w przypadku wartości centralnych; wręcz przeciwnie są rozbieżne.

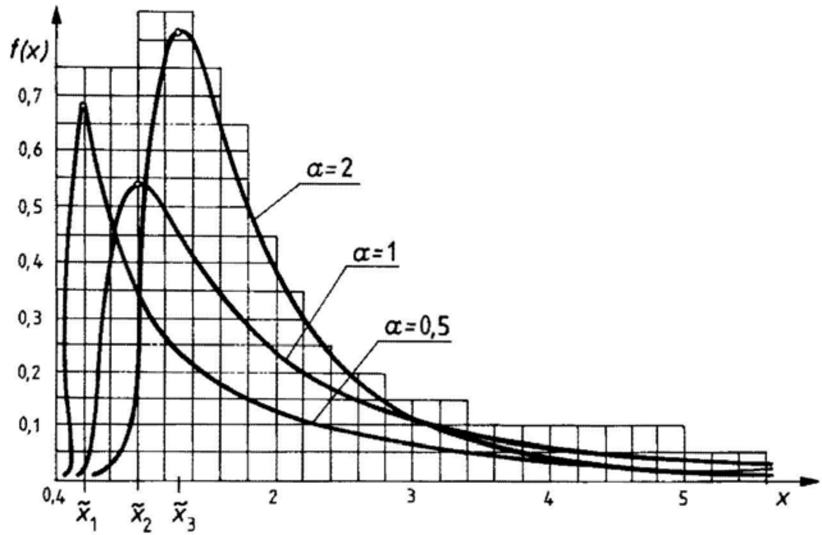
W statystyce ekstremów zamiast gęstości prawdopodobieństwa lub dystrybuanty ciągłej zmiennej losowej, wygodniej jest posługiwać się innymi charakterystykami prawdopodobieństwa, na przykład intensywnością $r(x)$ oraz okresem powtarzalności $t(x)$.

W przypadku analizy losowej funkcji, np. obciążenia wiatrem, należy określić częstość (powtarzalność $t(x)$) występowania obciążeń większych od wartości progowej o intensywności $r(x)$.

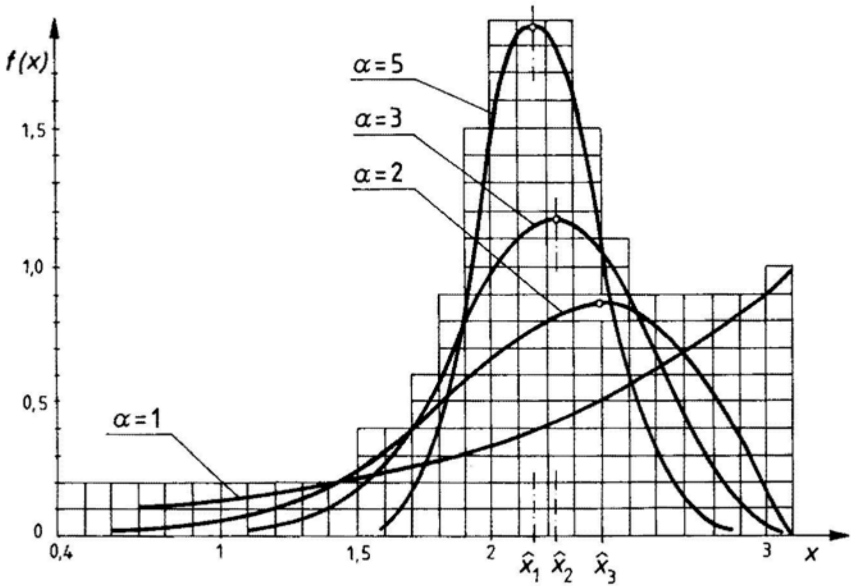
Do oszacowania parametrów ekstremalnych zmiennych losowych stosuje się rozkłady asymptotyczne, np. rozkłady Gumbela, Frecheta i Weibulla, których wykresy przedstawiono na rys. 1.12, 1.13 i 1.14.



Rys. 1.12. Wykresy funkcji rozkładu asymptotycznego maksimów Gumbela dla zmiennych parametrów r



Rys. 1.13. Wykresy funkcji rozkładu asymptotycznego maksimów Frécheta dla różnych parametrów α



Rys. 1.14. Wykresy funkcji rozkładu asymptotycznego maksimów Weibulla dla zmiennych parametrów α

W tabl. 1.5 zestawiono ekstremalne funkcje rozkładów dotyczące maksimów (ważne w badaniach największych obciążeń) i minimów (znajdują zastosowanie w zagadnieniach analizy minimalnych wytrzymałości).

Tablica 1.5. Klasyfikacja asymptotycznych rozkładów ekstremalnych [59]

Rodzaj dystrybuanty	Rozkład minimów	Rozkład maksimów
I. Gumbela	$1-\exp[-e^{r(x-\tilde{x})}]$ $r>0$	$\exp[-e^{r(x-\tilde{x})}]$ $r>0$
II. Frécheta	$1-\exp\left[-\left(\frac{c-x}{c-\tilde{x}}\right)^{-\alpha}\right]$ $x \leqslant c,\ \alpha=(c-\tilde{x})r>0$	$\exp\left[-\left(\frac{x-c}{\tilde{x}-c}\right)^{-\alpha}\right]$ $x \geqslant c,\ \alpha=(\tilde{x}-c)r>0$
III. Weibulla	$1-\exp\left[-\left(\frac{x-c}{\tilde{x}-c}\right)^{\alpha}\right]$ $x \geqslant c,\ \alpha=(\tilde{x}-c)r>0$	$\exp\left[-\left(\frac{c-x}{c-\tilde{x}}\right)^{\alpha}\right]$ $x \leqslant c,\ \alpha=(c-\tilde{x})r>0$

Szczególna przydatność asymptotycznych rozkładów ekstremalnych polega na tym, że umożliwiają one prognozę probabilistyczną bez znajomości macierzystych rozkładów prawdopodobieństw.

W tabl. 1.5 parametr c, który ogranicza jednostronnie rozkłady ekstremalne II i III rodzaju, wynika zazwyczaj z fizycznej interpretacji zmiennej losowej.

Gdy rozkłady dotyczą zmiennej losowej dodatniej (II/max i III/min) bądź ujemnej (II/min, III/max), często przyjmuje się $c = 0$.

Wyboru jednej z trzech rodzajów funkcji ekstremalnych dokonuje się na podstawie rozeznania, czy wartości ekstremalne są nieograniczone, czy ograniczone lewostronnie, czy też prawostronnie.

Do szacowania wytrzymałości materiałów i nośności systemów konstrukcyjnych używa się na ogół rozkładów normalnych i logarytmiczno-normalnych.

Do estymacji losowych parametrów obciążeń zmiennych (np. pochodzenia klimatycznego: obciążenie wiatrem, śniegiem) stosuje się rozkłady niesymetryczne i ekstremalne.

Do szacowania tych obciążeń używa się zazwyczaj asymptotycznych rozkładów wartości skrajnych.

Parametry losowe obciążeń zmieniają się w czasie i muszą być analizowane zgodnie z zasadami teorii procesów stochastycznych.

Teoria procesów stochastycznych zajmuje się uogólnieniem rachunku prawdopodobieństwa na przypadek zmiennych losowych, których rozkłady zależą od zmiennych parametrów (np. czasu).

Obciążenia stałe (pochodzą one zarówno od części nośnych budowli, jak i jej wyposażenia). Opisuje się je zazwyczaj rozkładami symetrycznymi.