

**Wykłady opracowano na podstawie książek:**

**Antoni Biegus**

**Probabilistyczna analiza konstrukcji**

**PWN 1999**

**Szczepan Woliński, Krystyna Wróbel**

**Niezawodność konstrukcji budowlanych**

**Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej**

**2001**

## 2. Szacowanie bezpieczeństwa konstrukcji metodą probabilistyczną poziomu 2

Podstawą obliczeń probabilistycznych poziomu 2 bezpieczeństwa konstrukcji są dwa parametry statystyczne: wartość centralna  $m_x$  (w szczególności  $\bar{x}$  – średnia lub  $\tilde{x}$  - mediana) oraz miara rozrzutu  $\sigma_x$  (w szczególności  $s_x$  – odchylenie standardowe lub charakterystyczne,  $\nu_x$  - logarytmiczny współczynnik zmienności).

Parametry  $m_x$  i  $\sigma_x$  opisują w pełni rozkład normalny.

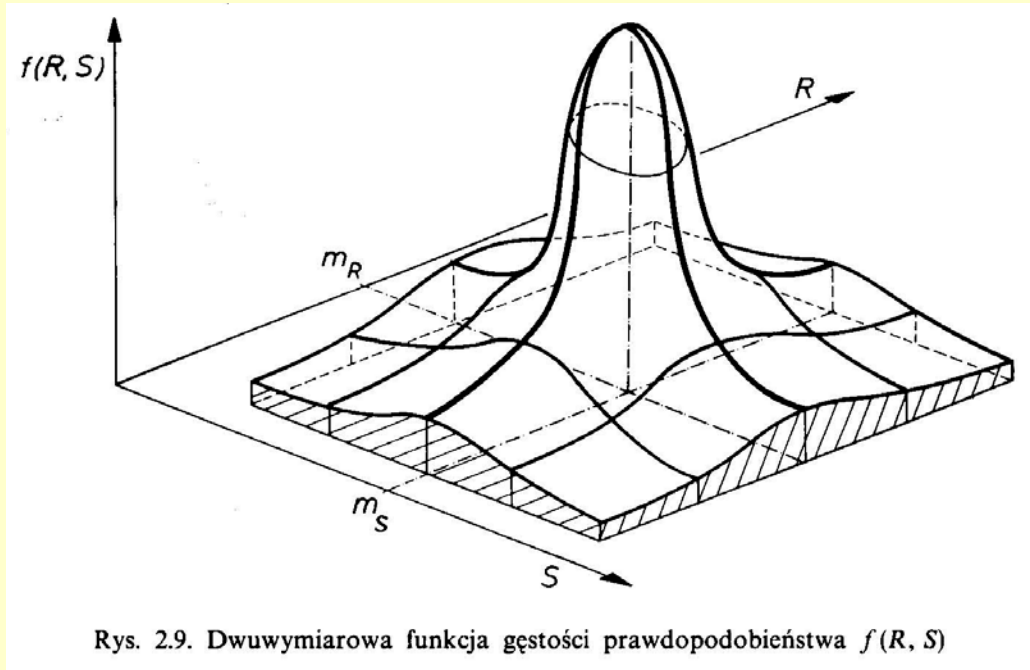
Do oceny niezawodności w tej metodzie nie jest jednak potrzebna identyfikacja typu rozkładu prawdopodobieństwa.

Są to obliczenia "bezrozkładowe", to znaczy nie wymagają hipotez o typie rozkładu prawdopodobieństw.

Metody probabilistyczne poziomu 2 służą do kalibrowania częściowych współczynników bezpieczeństwa występujących w metodzie probabilistycznej poziomu 1 (najczęściej w celu nowelizacji norm obciążenia i wymiarowania konstrukcji).

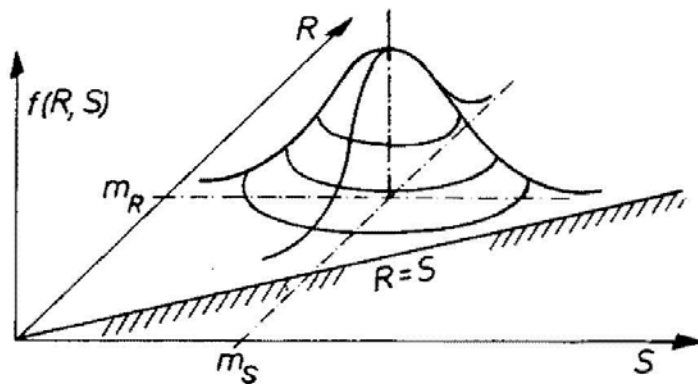
Rozpatruje się przypadek analizy niezawodności konstrukcji, w której o bezpieczeństwie decydują dwa pojedyncze i niezależne czynniki losowe: wytrzymałość  $R(\omega)$  i obciążenie  $S(\omega)$ .

Dwuwymiarową gęstość prawdopodobieństwa funkcji niezawodności konstrukcji  $f(R, S)$  przedstawiono na rys. 2.9.



Rys. 2.9. Dwuwymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f(R, S)$

Geometryczną interpretację bezpieczeństwa w metodzie probabilistycznej poziomu 2, przy założeniu liniowości stanu granicznego, pokazano na rys. 2.10.



Rys. 2.10. Określenie bezawaryjnych i awaryjnych stanów konstrukcji

W przypadku dwóch wpływów losowych  $f(S)$  i  $f(W)$  otrzymuje się dwuwymiarowy rozkład prawdopodobieństwa niezawodności konstrukcji w postaci

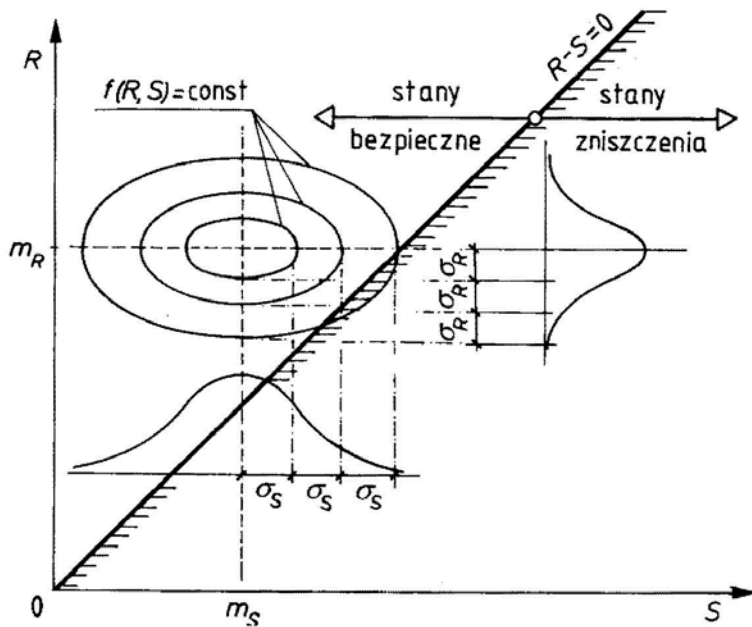
$$f(R, S) = f(R)f(S) \quad (1)$$

Przy założeniu liniowości brzeg stanu granicznego opisuje linia prosta

$$R = S \quad (2)$$

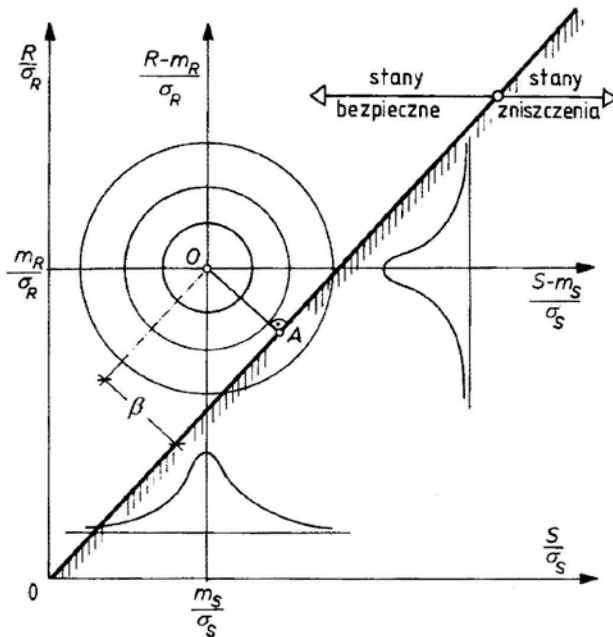
Objętość gęstości prawdopodobieństwa  $f(R, S)$  poniżej tej prostej (rys. 2.10) odpowiada obszarowi awaryjnemu (stanom zawodności konstrukcji).

Dla rozkładów normalnych wytrzymałości i obciążenia otrzymuje się dla przypadku  $f(R, S) = \text{const}$  warstwicę w postaci elips (rys. 2.11)



Rys. 2.11. Stany bezawaryjne konstrukcji na płaszczyźnie fazowej

Przechodząc do nowego układu współrzędnych  $S / \sigma_S$  oraz  $R / \sigma_R$ , elipsy na rys. 2.11 zmieniają się w koła (rys. 2.12), przy czym zmienia się również nachylenie prostej stanu granicznego.



Rys. 2.12. Stany bezawaryjne konstrukcji na płaszczyźnie fazowej we współrzędnych zredukowanych

Przenosząc dodatkowo początek układu współrzędnych na rys. 2.12 do środka koła  $(m_S / \sigma_S, m_R / \sigma_R)$ , otrzymuje się nowe współrzędne.



$$\hat{S} = \frac{S - m_S}{\sigma_S} \quad (3)$$

$$\hat{R} = \frac{R - m_R}{\sigma_R} \quad (4)$$

Równanie stanu granicznego konstrukcji ma wówczas następującą postać

$$\hat{R}\sigma_R + m_R - \hat{S}\sigma_S - m_S = 0 \quad (5)$$

Im bliżej początku zmienionego układu współrzędnych leży prosta stanu granicznego, tym większe jest prawdopodobieństwo  $p_f$  że stan graniczny zostanie przekroczony.

Najmniejsza odległość między środkiem  $O$  przeniesionego układu współrzędnych a prostą stanu granicznego (w punkcie  $A$ ) jest miarą bezpieczeństwa  $p$ .

Równanie (5) można przedstawić w następującej postaci

$$\hat{R} \frac{-\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} + \hat{S} \frac{-\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} - \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = 0 \quad (6)$$

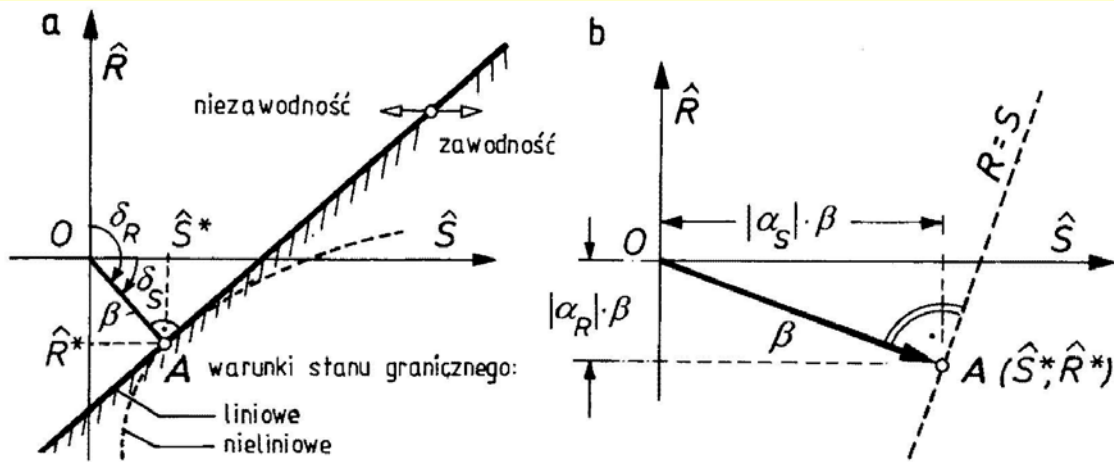
Współczynniki przy wartościach  $\hat{R}$  i  $\hat{S}$  są kosinusami kierunkowymi (nazywanymi współczynnikami wrażliwości  $\alpha_S$ ,  $\alpha_R$ ) wersora prostopadłego do linii stanu granicznego w punkcie  $A$  (rys. 2.13)

$$|\cos \delta_S| = |\alpha_S| = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (7)$$

$$|\cos \delta_R| = |\alpha_R| = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (8)$$

i dlatego musi zachodzić związek

$$\alpha_R^2 + \alpha_S^2 = 1 \quad (9)$$



Rys. 2.13. Określenie indeksu niezawodności  $\beta$

Wraz z kosinusami kierunkowymi i odległością  $\beta$  otrzymuje się współrzędne dolnego punktu  $A$  (nazywanego punktem kontrolnym), prostopadłej do prostej stanu granicznego.

Gdy stan graniczny jest formą nieliniową, otrzymuje się krzywoliniowy brzeg obszaru granicznego (rys. 2.13a).

Współrzędne punktu kontrolnego  $A$  na rys. 2.13b są następujące

$$\hat{S}^* = |\cos \delta_S| \beta = |\alpha_S| \beta \quad (10)$$

$$\hat{R}^* = |\cos \delta_R| \beta \quad (11)$$

Należy zaznaczyć, że  $\alpha_S$  i  $\alpha_R$  jako kosinusy kierunkowe  $\beta$ , zasadniczo wpływają na współrzędne punktu kontrolnego  $A$  (patrz rys. 2. 13b).

W punkcie kontrolnym  $A$  o współrzędnych  $(\hat{S}^*, \hat{R}^*)$  istnieje największe prawdopodobieństwo, że brzeg obszaru granicznego zostanie przekroczony.

Miarą bezpieczeństwa konstrukcji jest wskaźnik niezawodności  $\beta$  równy odległości linii stanów granicznych  $R = S$  w punkcie  $A$ , od początku układu  $O$  (w układzie współrzędnych standaryzowanych  $\hat{R}, \hat{S}$ ).

Jest to probabilistyczne sprawdzenie bezpieczeństwa konstrukcji poziomu 2.

W układzie współrzędnych  $S, R$  współrzędne punktu kontrolnego  $A(\hat{S}^*, \hat{R}^*)$  wyznaczają wartości obliczeniowe  $S_d, R_d$  które wynoszą

$$\hat{S}^* = S_d = m_S + \alpha_S \beta \sigma_S \quad (12)$$

$$\hat{R}^* = R_d = m_R + \alpha_R \beta \sigma_R \quad (13)$$

Z równania warunku stanu granicznego  $\hat{R}^* = \hat{S}^*$  otrzymuje się wzór na probabilistyczny wskaźnik niezawodności konstrukcji

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\alpha_R \sigma_R + \alpha_S \sigma_S} \quad (14)$$

Praktyczne zastosowania probabilistycznych obliczeń poziomu 2 są łatwiejsze, gdy zrezygnuje się z jednolitej miary niezawodności  $\beta$  i osobno sprawdza się rozdzielone wskaźniki odnoszące się do nośności  $\beta_R$  i obciążeń  $\beta_S$  (rys. 2.13b) w następującej postaci

$$\beta_R = \alpha_R \beta \quad (15)$$

$$\beta_S = \alpha_S \beta \quad (16)$$

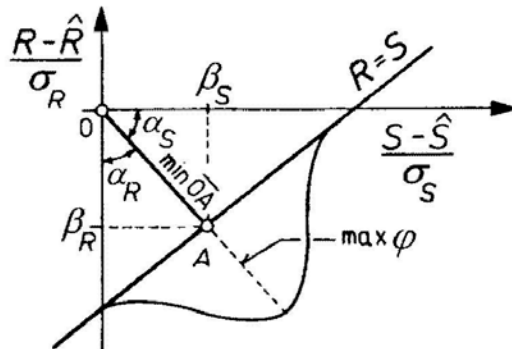
Wówczas równanie podstawowe sprzężonej teorii niezawodności (rys. 2.14) ma postać

$$\beta = \alpha_R \beta_R + \alpha_S \beta_S \quad (17)$$

gdzie

$$\beta_R = \frac{m_R - R_d}{\sigma_R} \quad \text{wskaźnik nośności} \quad (18)$$

$$\beta_S = \frac{S_d - m_S}{\sigma_S} \quad \text{wskaźnik skutków działań} \quad (19)$$



Rys. 2.14. Określenie punktu obliczeniowego zapewnienia niezawodności konstrukcji w metodzie probabilistycznej poziomu 2

Wartości obliczeniowe efektów działań obciążeń  $S_d$  i nośności  $R_d$  wyznacza się tak, aby prawdopodobieństwo wystąpienia bardziej niekorzystnych według Eurokodu 1 wynosiło

$$\Pr(S > S_d) = \varphi(+\alpha_S \beta) = \varphi(-0,7 \beta) \quad (20)$$

$$\Pr(R < S_d) = \varphi(-\alpha_R \beta) = \varphi(-0,8 \beta) \quad (21)$$

Zazwyczaj dla budowli tej samej klasy bezpieczeństwa przyjmuje się  $\beta = \text{const}$ .

Według Eurokodu 1 dla stanu granicznego nośności zaleca się przyjmować  $\beta = 3,8$ .

J. Murzewski zaproponował modyfikację wzoru na wskaźnik niezawodności, uwzględniając oprócz losowej nośności  $R$  i efektu działań  $S$  błąd modelu obliczeniowego  $C$ .

Wówczas wskaźnik niezawodności opisuje zależność

$$\beta = \alpha_R \beta_R + \alpha_S \beta_S + \alpha_C \beta_C \quad (22)$$

gdzie:

$\alpha_C$  – współczynnik wrażliwości modelu obliczeniowego

$\beta_C$  – częściowy współczynnik bezpieczeństwa błędu projektowania.

W ten sposób proponuje się uwzględnić trzy zakresy odpowiedzialności w budownictwie, jakie ponoszą wykonawca ( $R$ ), użytkownik ( $S$ ) i projektant ( $C$ ).



Sposób szacowania bezpieczeństwa metodą probabilistyczną poziomu 2 przy trzech i więcej niezależnych wpływach losowych jest podobny.

W przypadku na przykład trzech czynników losowych w miejsce koła na rys. 2.12 otrzymuje się kulę, w miejsce zaś prostej na rys. 2.13 otrzymuje się płaszczyznę graniczną.

Prosta wyprowadzona ze środka kuli, prostopadła do powierzchni granicznej, jest wówczas miarą bezpieczeństwa  $\beta$ .

## 2. Szacowanie bezpieczeństwa konstrukcji metodą probabilistyczną poziomu 3

Warunki bezpieczeństwa budowli (wyłączając przypadki niezależne od człowieka, np. eksplozje, ruchy tektoniczne, powódź lub inne klęski żywiołowe) można sformułować, wprowadzając postulat warunkowej pewności.

Gwarancja bezpieczeństwa wymaga także zachowania zasady rozgraniczenia odpowiedzialności polegającej na ustaleniu dla każdej strony (projektanta, wykonawcy i użytkownika) nieprzekraczalnych (gwarantowanych) granicznych wartości parametrów bezpieczeństwa, za które dana jednostka odpowiada.

Przez parametry bezpieczeństwa ustroju rozumie się wszelkie wielkości, które mają wpływ na bezpieczeństwo konstrukcji, tj. nośność budowli  $R$  (gwarantowana przez wykonawcę), obciążenie  $S$  (dopuszczone w trakcie eksploatacji przez użytkownika), błąd modelu obliczeniowego  $C$  (niedoskonałości w modelu analizy wyęźnienia ustroju zastosowanym przez projektanta).

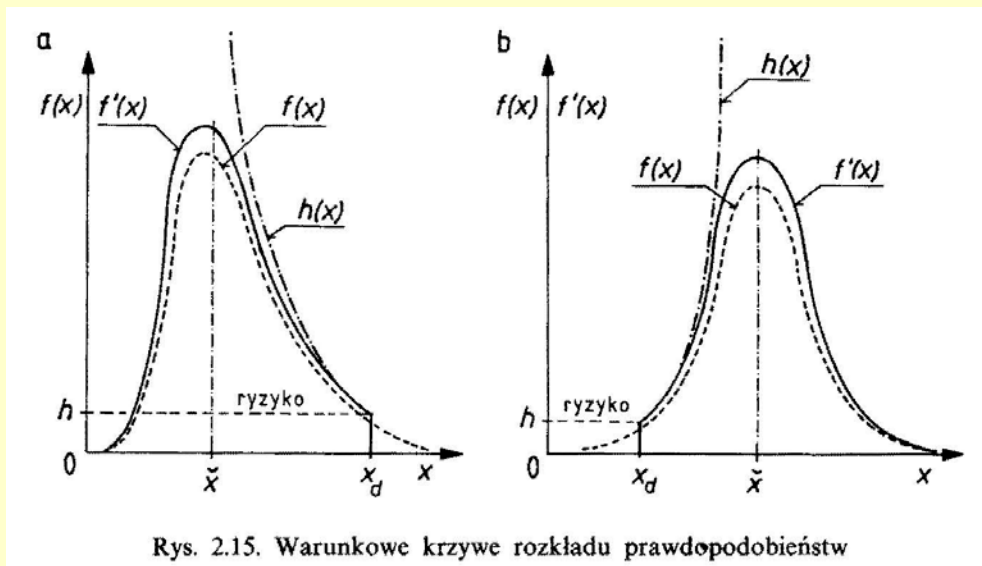
Wielkości  $R(\omega)$ ,  $S(\omega)$ ,  $C(\omega)$  są losowe i wspólnie generują bezpieczeństwo ustroju.

Optymalną sytuacją jest, gdy każda ze stron ( $R$ ,  $S$ ,  $C$ ) gwarantuje podobne bezpieczeństwo przez określenie nieprzekraczalnych parametrów  $R_d$ ,  $S_d$  i  $C_d$ .

Rozwiązanie tak postawionego zadania optymalizacyjnego niezawodności konstrukcji podał prof. Janusz Murzewski.

Zakłada się, że zmienna losowa  $x$ , o funkcji rozkładu  $f(x)$  i dystrybuancie  $F(x)$  przedstawia parametr bezpieczeństwa  $(R, S, C)$ .

Nieograniczone krzywe rozkładu  $f(X)$  uważa się za bezwzględne charakterystyki rozkładów – linie przerywane na rys. 2.15.



Rys. 2.15. Warunkowe krzywe rozkładu prawdopodobieństw

Warunkowe charakterystyki rozkładów  $f'(x)$ , dla których zakres zmienności  $x$  leży po jednej stronie zmienności  $x_d$  oznaczone na rys. 2.15 liniami ciągłymi.

Warunkowa charakterystyka rozkładu  $f'(x)$  (rys. 2.15a) jest ograniczona prawostronnie wartością graniczną  $x_d$  i opisują ją zależności

$$f'(x) = \frac{f(x)}{F(x_d)} \quad \text{dla } x < x_d \quad (23)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla } x \geq x_d \quad (24)$$

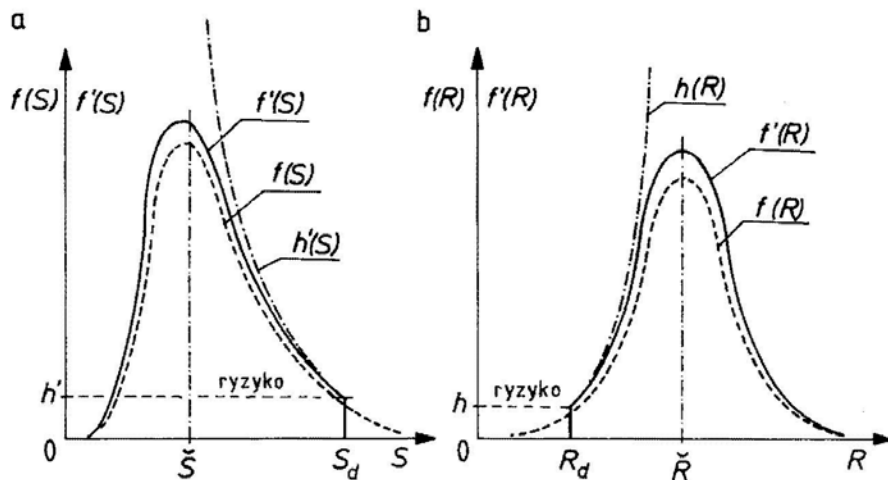
Warunkową charakterystykę rozkładu  $f'(x)$  pokazaną na rys. 2.15b ograniczoną lewostronnie wartością graniczną  $x_d$  opisują wzory

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla } x \leq x_d \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x_d)} \quad \text{dla } x > x_d \quad (26)$$

Skorygowane funkcje  $f'(x)$  zostały dobrane tak, aby pola pod krzywymi gęstości  $f(x)$  i  $f'(x)$  były sobie równe i wynosiły 1.

Położenie wartości granicznych  $x_d$  z lewej lub prawej strony wykresów pokazanych na rys. 2.15 zależy od tego, czy dany parametr bezpieczeństwa powinien być - tak jak nośność - większy od granicznego  $R_d$ , czy też jak dla obciążeń - mniejszy od granicznego  $S_d$  co pokazano na rys. 2.16.



Rys. 2.16. Warunkowe krzywe rozkładu prawdopodobieństw obciążenia (a) i nośności (b)

Ograniczone rozkłady prawdopodobieństwa nośności, ( $R$ ) i obciążeń, ( $S$ ) są warunkowane kontrolą ze strony jednostek za nie odpowiedzialnych.

W probabilistycznej metodzie poziomu 3 zaproponowanej przez J. Murzewskiego wprowadza się miary bezpieczeństwa w postaci funkcji ryzyka przekroczenia  $h(x)$  (hazard function) i skali zagrożenia  $1/k$ .

Funkcja ryzyka  $h(x)$  bywa nazywana intensywnością prawdopodobieństwa i jest ona równa rzędnej granicznej (progowej) rozkładu prawdopodobieństwa uciętego w punkcie  $x_d$  (patrz rys. 2.15).

W przypadku analizy bezpieczeństwa konstrukcji ryzyka  $h$  dotyczą przekroczenia wartości  $R_d$  w dół (wystąpienia mniejszej nośności budowli), a  $h'$  wartości  $S_d$  w górę (działania większych obciążeń na konstrukcję).

Ryzyka te są związane z gęstością prawdopodobieństwa  $f$  i dystrybuanty  $F$  następująco



$$h(R_d) = \frac{f(R_d)}{1 - F(R_d)} \quad (\text{zaniżenie}) \quad (27)$$

$$h'(S_d) = \frac{f(S_d)}{F(S_d)} \quad (\text{przekroczenie}) \quad (28)$$

gdzie:

$R_d$  – wartość obliczeniowa nośności,  
 $S_d$  – wartość obliczeniowa obciążenia.

Ryzyko  $h( . )$  wyraża się funkcją:

- Millsa w przypadku rozkładów normalnych;
- wykładniczą dla rozkładów Gumbela;
- potęgową, gdy  $R$  ma rozkład Weibulla, a  $S$  Frecheta.

Skalę zagrożenia  $1/k_i$  współrzędnej stanu konstrukcji określono w następujący sposób

$$\frac{1}{k_R} = R_d h(R_d) \quad (29)$$

$$\frac{1}{k_S} = S_d h'(S_d) \quad (30)$$

Wartości obliczeniowe  $S_d$ ,  $R_d$  interpretuje się jako kresy uciętych rozkładów prawdopodobieństw.

Z warunku minimalnej zawodności uzyskuje się zasadę równej skali zagrożenia.

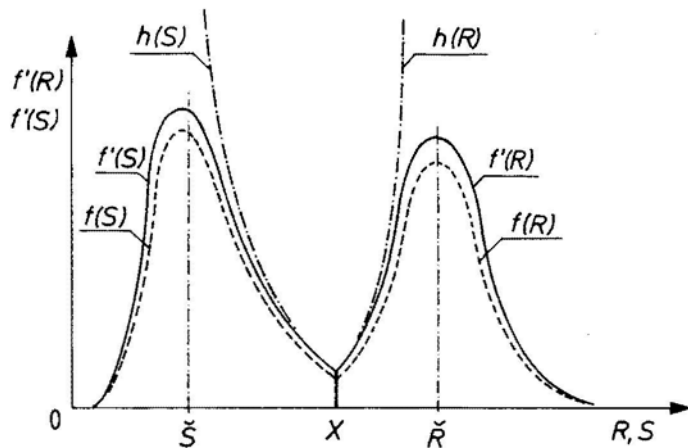
Przyjmując jako kryterium optymalizacji stałą skalę zagrożenia  $1/k = \text{const}$ , otrzymuje się równania

$$\frac{R_d f(R_d)}{1 - F(R_d)} = \frac{S_d f(S_d)}{F(S_d)} = \frac{1}{k} = \text{const} \quad (31)$$

lub postaci równoważnej

$$R_d h(R_d) = S_d h(S_d) = \frac{1}{k} \quad (32)$$

Krzywe rozkładu prawdopodobieństw obciążeń i nośności dla stałej skali zagrożenia  $1/k$  oraz  $S_d = R_d = X$  (tj. graficzną interpretację równań (31) i (32) pokazano na rys. 2.17.



Rys. 2.17. Krzywe rozkładu prawdopodobieństw obciążenia i nośności dla stałej skali zagrożenia  $1/k$

Wówczas prawdopodobieństwo niebezpiecznego stanu konstrukcji wynosi

$$p_f = 1 - [1 - F_R(X)] F_S(X) \quad (33)$$

gdzie  $F_R(X)$ ,  $F_S(X)$  oznaczają dystrybuantę nośności i obciążenia.

Z równania (32) wynika zasada, że iloczyny optymalnych wartości obliczeniowych i ryzyka ich przekroczenia są sobie równe.

Ta metoda oceny bezpieczeństwa wymaga tylko arbitralnego ustalenia jednego parametru, jakim jest skala zagrożenia  $l/k$ .

W metodzie probabilistycznej poziomu 2 globalny wskaźnik niezawodności  $\beta$  zastępują wskaźniki rozdzielone  $\beta_R$  i  $\beta_S$  według zależności (17) lub zgodnie z propozycją J. Murzewskiego  $\beta_R$ ,  $\beta_S$  i  $\beta_C$  odpowiednio do trzech zakresów odpowiedzialności, czyli nośności  $R$ , obciążeń  $S$  i błędów projektowych  $C$  według wzoru (22)

$$\beta = \alpha_R \beta_R + \alpha_S \beta_S + \alpha_C \beta_C$$

Współczynniki wrażliwości  $\alpha_R$ ,  $\alpha_S$  i  $\alpha_C$  są proporcjonalne do odchyłeń standardowych.

Zasadnicza różnica między podejściem w metodzie probabilistycznej poziomu 2 i poziomu 3 polega na inaczej rozłożonych elementach (miarach) bezpieczeństwa, a także sposobie ich kalibrowania.

Wskaźnik globalny niezawodności  $\beta$  oblicza się ze wzoru (22) dla zadanego prawdopodobieństwa przekroczenia stanu granicznego i przyjmuje się jako wartość stałą.

Prawdopodobieństwo zawodności konstrukcji  $p_f$  jest miarą bezpieczeństwa w metodzie poziomu 2, która bez reguł optymalizacji jest miarą arbitralną.

W prezentowanej metodzie probabilistycznej poziomu 3 zaproponowanej przez J. Murzewskiego postuluje się jednakowe i stałe ryzyka przekroczenia wartości granicznych.

Optymalną miarą bezpieczeństwa w omawianej metodzie probabilistycznej poziomu 3, polegającą na minimalizacji zawodności  $p_f = \min$  dla trzech parametrów: nośności  $R$ , obciążeń  $S$  i błędu modelu obliczeń  $C$  wprowadził J. Murzewski formułując w postaci wzoru

$$\frac{R_d f(R_d)}{1 - F(R_d)} = \frac{C_d f(C_d)}{1 - F(C_d)} = \frac{S_d f(S_d)}{F(S_d)} = \frac{1}{k} = \text{const} \quad (34)$$

lub w równoważnej postaci

$$R_d h(R_d) = S_d h(S_d) = C_d h(C_d) = \frac{1}{k} \quad (35)$$

gdzie:

- $C_d$  wartość obliczeniowa niepewności modelu obliczeniowego,
- $1/k$  skala zagrożenia.

Ze wzorów (34) i (35) wynika, że względne ryzyko zagrożenia, czyli skala zagrożenia  $l/k$  powinna być taka sama dla nośności konstrukcji, efektu działania obciążeń i niepewności zastosowanego modelu obliczeniowego.

Wzór (34) odpowiada lepiej podziałowi odpowiedzialności za bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych niż wcześniej analizowane dwa ( $R$  i  $S$ ) zakresy odpowiedzialności za niezawodność budowli.

W budownictwie są bowiem trzy główne jednostki odpowiedzialne: projektant -  $C$ , wykonawca -  $R$  i użytkownik -  $S$ .

Probabilistyczna ocena obciążenia budowli służy do ustalenia wartości ekstremalnych charakteryzujących się małym prawdopodobieństwem ich wystąpienia.