Wykłady opracowano na podstawie książek:

Antoni Biegus
Probabilistyczna analiza konstrukcji
PWN 1999

Szczepan Woliński, Krystyna Wróbel
Niezawodność konstrukcji budowlanych
Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej
2001

2. 3. Metody symulacyjne – metoda Monte Carlo

Ocena niezawodności konstrukcji metodą symulacji Monte Carlo:

- wygenerować ciąg niezależnych liczb losowych lub pól losowych dla każdej zmiennej losowej uwzględnionej w analizie niezawodności,
- obliczyć wartości przyjętej miary niezawodności, traktowane jako wyniki fizycznych eksperymentów,
- sprawdzić, czy poszczególne wartości znajdują się w obszarze stanów niezawodnych czy awaryjnych,
- po wykonaniu odpowiednio dużej liczby takich operacji (N) obliczyć iloraz liczby wyników znajdujących się w obszarze awaryjnym N_I do ogólnej liczby wyników N,
- wartość ilorazu $q = N_I / N$ można potraktować jako miarę zawodności konstrukcji,
- gdy $N \to \infty$ (niezawodność konstrukcji $Q = 1 - q$).

Teoretycznie, uzyskanie właściwej dokładności obliczeń wymaga bardzo dużej liczby wyników $N \geq (25 \div 100) q^{-1}$, np. 10000.

W praktyce zadowalającą zbieżność wyników można uzyskać dla niewielkiej liczby realizacji, np. 10-30.

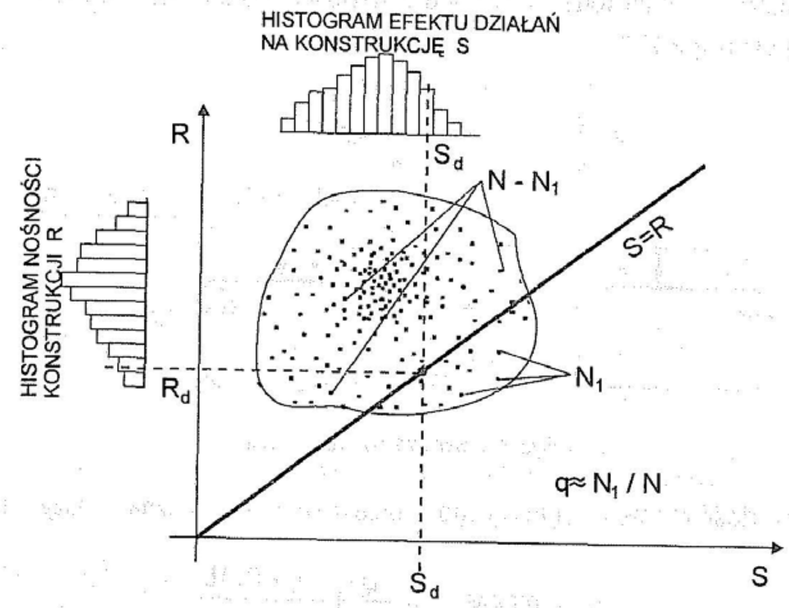
Metodę Monte Carlo można zastosować do obliczania dowolnych konstrukcji, szczególnie tych, dla których wektor opisujący zachowanie się konstrukcji jest funkcją nieliniową i metoda linearyzacji statystycznej może prowadzić do znacznych błędów.

Udoskonalone metody symulacji Monte Carlo wymagają dodatkowych informacji dotyczących stanu i/lub obszaru stanów zawodnych konstrukcji, ale pozwalają uzyskać znacznie szybszą zbieżność wyników.
Są to między innymi metody: symulacji według funkcji ważności, hipersześcianów łacińskich, próbkowania adaptacyjnego.

Zastosowania metody symulacji Monte Carlo do oceny niezawodności konstrukcji budowlanych wykorzystano w programach komputerowych P. Marka i M. Gustara. Programy te opracowano, zakładając, że

- zmienne losowe: elementarne (właściwości materiałów, wymiary geometryczne, imperfekcje i działania), złożone (wielowymiarowe, skorelowane, efekt działań, wielkości graniczne itp.) oraz wynikowe (miary niezawodności, bezpieczeństwa, trwałości, użytkowalności i ekonomii) są reprezentowane przez histogramy słupkowe (rys. 4.7),
- weryfikacja niezawodności polega na porównaniu obliczonego prawdopodobieństwa zniszczenia lub przekroczenia ustalonych wielkości granicznych (tzn. stosunku wyników znajdujących się w obszarze stanów zniszczenia lub awaryjnych do ogólnej liczby wyników symulacji), z prawdopodobieństwami uznanymi za dopuszczalne.

Koncepcję przedstawionej metody symulacji Monte Carlo zilustrowano na rys. 4.7.



Rys. 4.7. Symulacja Monte Carlo w dwuwymiarowej przestrzeni zmiennych losowych S i R

Zestaw programów symulacyjnych P. Marka i M. Gustara obejmuje pięć programów:

- LoadCom - program do analizy kombinacji obciążeń konstrukcji, między innymi obciążeń obliczeniowych według różnych norm,

- M-Star - program pozwalający na rozwiązywanie równań algebraicznych, logarytmicznych, wykładniczych i trygonometrycznych zawierających do 30 zmiennych losowych wyrażonych przez odpowiednie histogramy słupkowe, za pomocą którego można analizować wiele bardzo różnych zagadnień dotyczących nośności elementów i konstrukcji, kombinacji efektów obciążeń (sił wewnętrznych), prawdopodobieństwa, zniszczenia, kumulacji uszkodzeń i oceny użytkowalności konstrukcji,

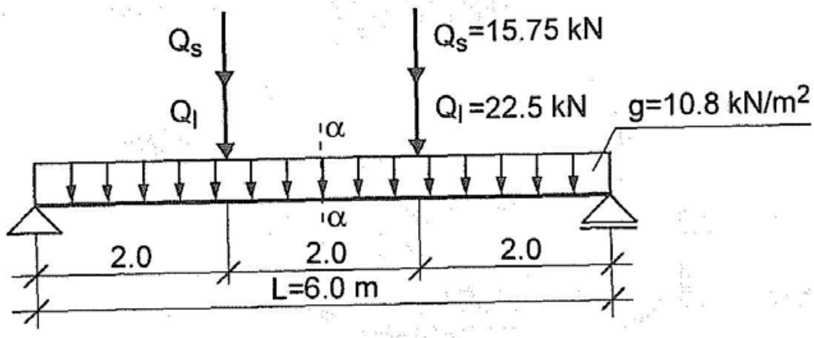
- AntHill - program umożliwiający analizę zagadnień, w których występują zmienne dwu- i wielowymiarowe, między innymi: zagadnień oceny niezawodności, sił wewnętrznych w konstrukcjach poddanych złożonym oddziaływaniom,

- DamAc - program do oceny wpływu historii i czasu obciążenia na odporność konstrukcji na zmęczenie lub ocenę niezawodności konstrukcji z uwzględnieniem reologicznych zmian właściwości materiału.

- ResCom - program do analizy obciążeń konstrukcji.

Przykład

Obliczyć, za pomocą symulacji Monte Carlo, moment zginający w przekroju krytycznym $\alpha-\alpha$ belki przedstawionej na rys. 4.8 o prawdopodobieństwie przewyższenia $q = 10^{-4}$



Rys. 4.8. Schemat statyczny belki

Największą wartość momentu zginającego można obliczyć ze wzoru:

$$M_{sd} = \max M_{\alpha-\alpha} = \frac{ql^2}{8} + \frac{(Q_I + Q_S)L}{3} \tag{1}$$

Obciążenia i długość belki są zmiennymi losowymi wyrażonymi za pomocą iloczynu ich wartości nominalnych (lub obliczeniowych) i odpowiednich histogramów słupkowych (określonych empirycznie), przedstawionych na rys. 4.9:

– obciążenie stałe: g = 10.8*Gvar , Gvar = Dead1

– obciążenie zmienne długotrwałe: $Q_I = 22.5*Q_{I,var}$

$Q_{I,var}$ = Long1

– obciążenie zmienne krótkotrwałe: $Q_S = 15.75*Q_{S,var}$

$Q_{S,var}$ = Short1

Rozpiętość belki: $L = 6.0*L_{var}$ L_{var} = U1-05

Do rozwiązania zadania zastosowano program M-Star:

M_{sd} = g*L^2/8+(Q_I +Q_S) *L/3

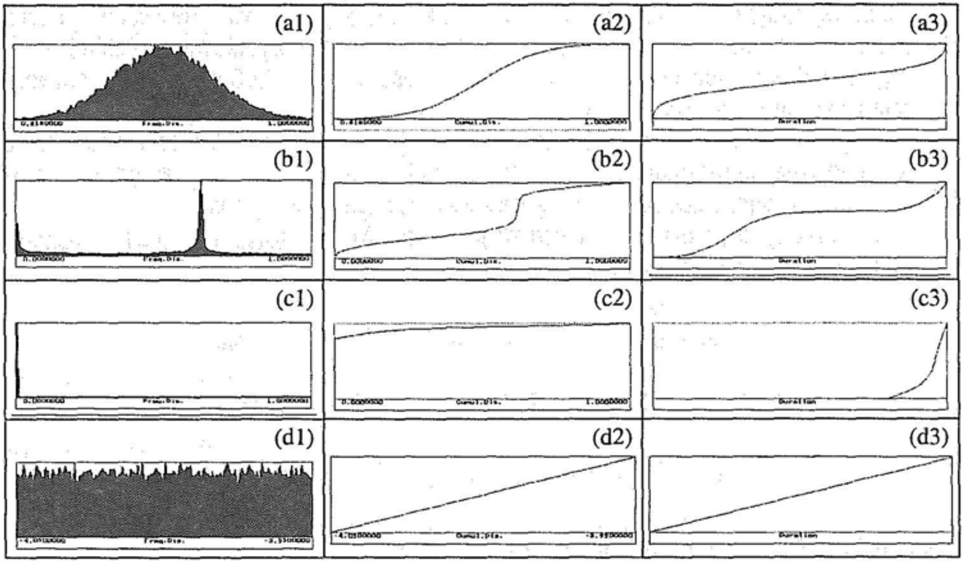
g = 10.8*G_{var}

Q_I = 22.5 * $Q_{I,var}$

Q_{Sh} = 15.75*$O_{s,var}$

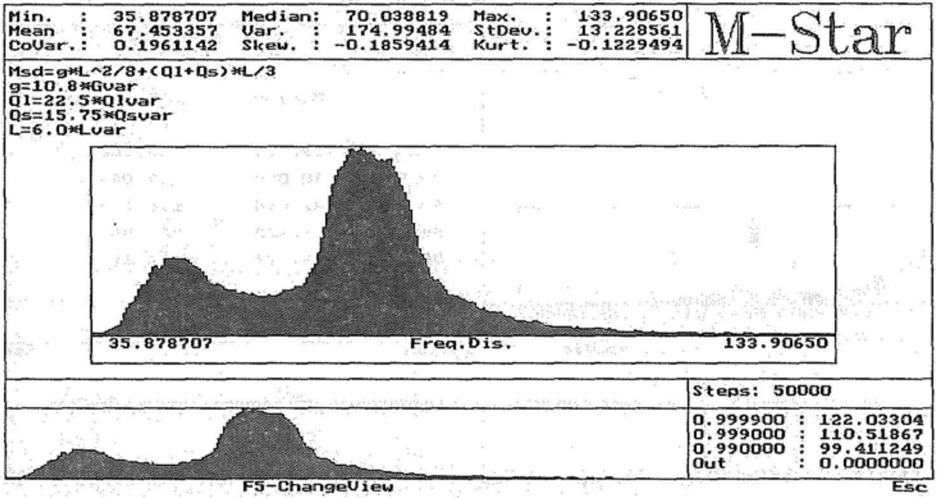
L = 6.0*L_{var}

Zmienne bazowe przyjęto według rys. 4.9.



Rys. 4.9. Histogramy słupkowe (a1, b1, c1, d1), dystrybuanty empiryczne (a2, b2, c2, d2) i krzywe rozkładu w czasie (a3, b3, c3, d3) bazowych zmiennych losowych Dead 1 (a), Long 1 (b), Short 1 (c), U1-05 (d)

Liczbę symulacji przyjęto 50 000. Rezultat obliczeń przedstawiono na rys. 4.10.



Rys. 4.10. Wydruk wyników obliczeń z przykładu 4.4 wykonanych za pomocą programu M-Star

Histogram przedstawiony na rys. 4.10 reprezentuje zmienną losową M_{sd} czyli moment zginający w krytycznym przekroju rozważanej belki, wywołany działaniem obciążeń g, Q_I i Q_s traktowanych jako nieskorelowane zmienne losowe o znanych rozkładach, z uwzględnieniem losowej zmienności długości belki L.

Wynik można przedstawić również w postaci dystrybuanty zmiennej losowej i krzywej rozkładu w czasie wynikowej zmiennej losowej M_{sd}.

Z wydruku wyników można odczytać wartość M_{sd} = 122.03 kNm, której prawdopodobieństwo zawyżenia wynosi $q = 10^{-4}$.

Do rozwiązania zadania można również użyć programu ResCom. Wartości nominalne i rozkłady losowe reprezentujących obciążenia przyjęto jak w rozwiązaniu za pomocą programu M-Star.

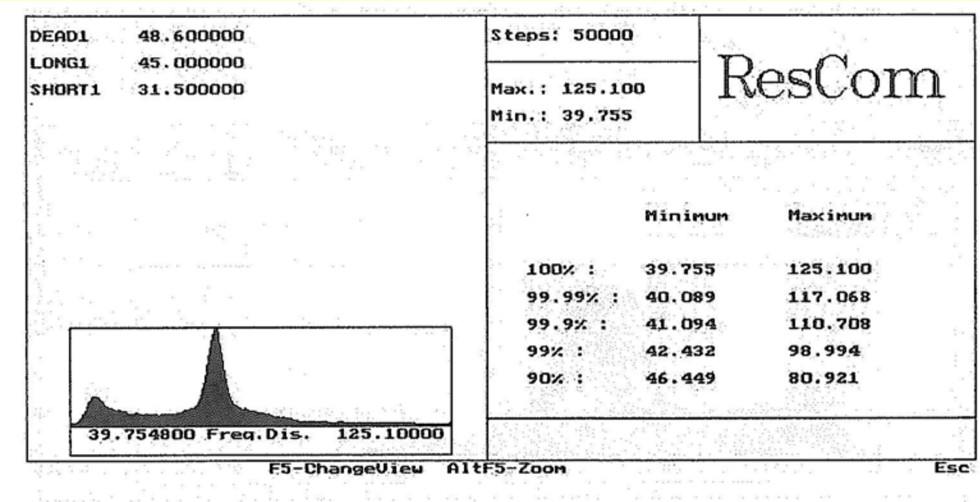
Długość belki traktuje się jako wielkość zdeterminowaną. Moment zginający w przekroju krytycznym jest sumą $M_{sd} = M_{sd}(g) + M_{sd}(O_I) + M_{sd}(O_s)$, a odpowiednie składniki wynoszą:

$$M_{sd}(g) = g \times L^2 / 8 = 10.8 * G_{var} * 6.0^2 / 8 = 48.60 * G_{var}$$

$$M_{sd}(Q_l) = Q_l \times L / 3 = 22.5 * Q_{l,var} * 6.0 / 3 = 45.0 * Q_{l,var}$$

$$M_{sd}(Q_s) = Q_s \times L / 3 = 15.75 * Q_{s,var} * 6.0 / 3 = 31.5 * Q_{s,var}$$

Rezultat obliczeń przedstawiono na rys. 4.11.

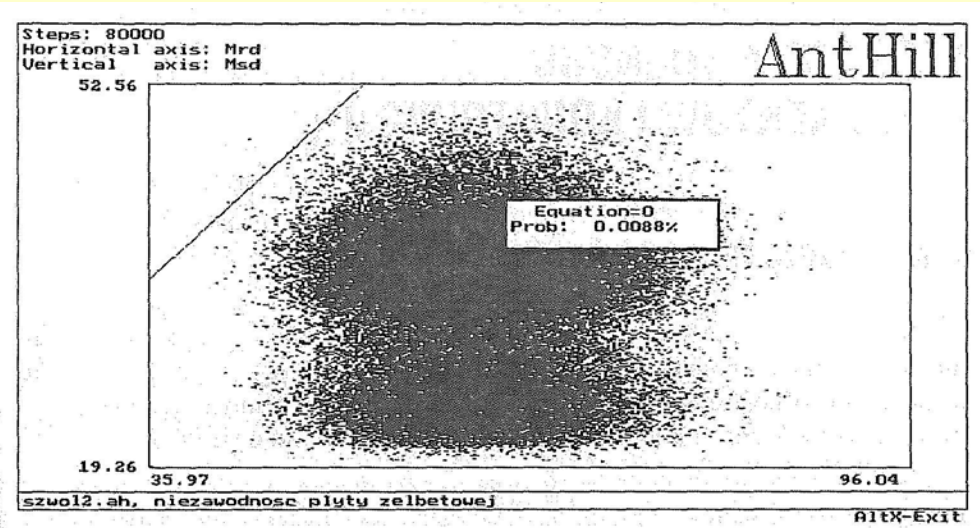


Rys. 4.11. Wydruk wyników obliczeń do przykładu 4.4 wykonanych przy pomocy programu ResCom

Z wydruku wyników można odczytać wartość $M_{sd} = 117.07$ kNm, której prawdopodobieństwo zawyżenia $q = 10^{-4}$.

Nieco mniejsza wartość M_{sd}, odpowiadająca $q = 10^{-4}$, wynika z pominięcia wpływu zmienności długości belki.

Przykładowe rozwiązanie typu Anthill



Rys. 4.13. Wydruk wyników obliczeń do przykładu 4.5, wykonanych za pomocą programu AntHill