

**Wykłady opracowano na podstawie książek:**

**Antoni Biegus**

**Probabilistyczna analiza konstrukcji**

**PWN 1999**

**Szczepan Woliński, Krystyna Wróbel**

**Niezawodność konstrukcji budowlanych**

**Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej**

**2001**

## 3.1. Parametry losowej nośności elementów konstrukcyjnych

Analiza losowa nośności elementów (przekroju, pręta) dla prostych przypadków wytrzymałościowych w zakresie sprężystej i plastycznej fazy wyężenia materiału oraz losowe ścieżki równowagi statycznej prętów rozciąganych, zginanych, ściskanych, a także w złożonych stanach wyężenia.

Parametry losowe nośności elementu konstrukcyjnego  $N(\omega)$ :

- momenty statystyczne pierwszego i drugiego rzędu (wartość centralna (średnia) oraz wariancję,
- wielkości pochodne: odchylenie charakterystyczne (standardowe) i współczynnik zmienności.

Zakłada się, że moduł Younga  $E(\omega)$ , pole przekroju poprzecznego  $A(\omega)$ , wskaźnik zginania  $W(\omega)$  i moment bezwładności  $J(\omega)$  są funkcjami losowymi silnie autoskorelowanymi po długości pręta.

Takie podejście ma swoje uzasadnienie doświadczalne, gdyż losowe rozproszenie właściwości po długości jednego elementu jest znacznie mniejsze niż wyniki pomiarów tych wielkości na losowo wybranych prętach.

Założono także, że badane wielkości losowe można aproksymować rozkładem normalnym.

Założenie to nie jest konieczne, gdyż sposób postępowania dla innych rozkładów zmiennej losowej jest podobny, a poczyniono je ze względu na prezentację prostych przykładów obliczeniowych.

Losową nośność  $N(\omega)$  elementu można zapisać w postaci iloczynu trzech, w zasadzie niezależnych, wielkości losowych

$$N(\omega) = a(\omega)C(\omega)w(\omega) \quad (1)$$

gdzie:

$C(\omega)$  – losowa charakterystyka geometryczna przekroju poprzecznego elementu (np.: pole przekroju poprzecznego  $A(\omega)$ , wskaźnik zginania  $W(\omega)$ , pole części przekroju czynnego przy ścinaniu  $A_v(\omega)$ ),

$w(\omega)$  – losowa wytrzymałość materiału,

$a(\omega)$  – współczynnik modelu wyężenia elementu (np. współczynnik: wyboczeniowy  $\varphi$ , zwichrzenia  $\varphi_L$  niestateczności miejscowej  $\varphi_p$ ).

Na losowość nośności  $N(\omega)$  elementu konstrukcyjnego, jako niezależnej części ustroju nośnego wpływa:

- losowe parametry wytrzymałości materiału (naprężenia walcownicze, naprężenia spawalnicze),
- losowe charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego pręta,
- losowe imperfekcje geometryczne osi pręta (mimośrodki technologiczne i konstrukcyjne osi pręta),
- losowe mimośrodki obciążeń (wady geometryczne styków i węzłów).

Nośność elementu nie jest deterministyczna jak liczba, lecz powinna być traktowana sposobem probabilistyczny jako funkcja.

Dlatego też w analizie nośności w ujęciu deterministycznym używa się określenia – wyznaczenie nośności, w ujęciu zaś probabilistycznym - oszacowanie nośności.

## 3.2. Losowa nośność pręta rozciąganego

Losową nośność pręta rozciąganego osiowo

$$N_{Rt}(\omega) = A(\omega)w(\omega) \quad (2)$$

gdzie  $A(\omega)$  - losowe pole przekroju poprzecznego netto,  
 $w(\omega)$  – losowa wytrzymałość materiału.

Oszacowanie wartości średniej nośności pręta rozciąganego

$$\bar{N}_{Rt} = \bar{A}\bar{w} \quad (3)$$

oraz odchylenie standardowe nośności

$$s_{Rt} = \sqrt{(\bar{A})^2 s_w^2 + s_A^2 s_w^2 + (\bar{w})^2 s_A^2} \quad (4)$$

gdzie:

$\bar{A}$ ,  $s_A$  – wartość średnia i odchylenie standardowe losowego pola przekroju poprzecznego pręta,

$\bar{w}$ ,  $s_w$  – wartość średnia i odchylenie standardowe losowej wytrzymałości materiału.

Wzór (4), jest ważny, gdy pole przekroju poprzecznego opisuje jeden parametr geometryczny (np. pole przekroju poprzecznego pełnego pręta okrągłego opisuje tylko losowa średnica  $d(\omega)$ ).

Dla prętów o przekrojach prostokątnych, dwuteowych, zetowych, kątowników itp. pole przekroju poprzecznego zależy od kilku losowych parametrów geometrycznych:  $A[a_1(\omega), a_2(\omega), \dots, a_i(\omega)]$ .

Wówczas wartość średnią  $\bar{A}$  i odchylenie standardowe pola przekroju poprzecznego  $s_A$  należy oszacować następująco:

$$\bar{A} = A(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_i) \quad (5)$$

$$s_A = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial A}{\partial a_i} \right)^2 s_{a_i}^2} \quad (6)$$

gdzie:

$\bar{a}_i, s_{a_i}$  – wartość średnia i odchylenie standardowe losowego i-tego wymiaru geometrycznego przekroju poprzecznego.

Na przykład dla pręta o prostokątnym losowym polu poprzecznym:  $h(\omega) \times b(\omega)$  i parametrach losowych wysokości  $(\bar{h}, s_h)$  i szerokości  $(\bar{b}, s_b)$  wartość średnia pola przekroju poprzecznego wynosi

$$\bar{A} = \bar{h}\bar{b} \quad (7)$$

odchylenie standardowe

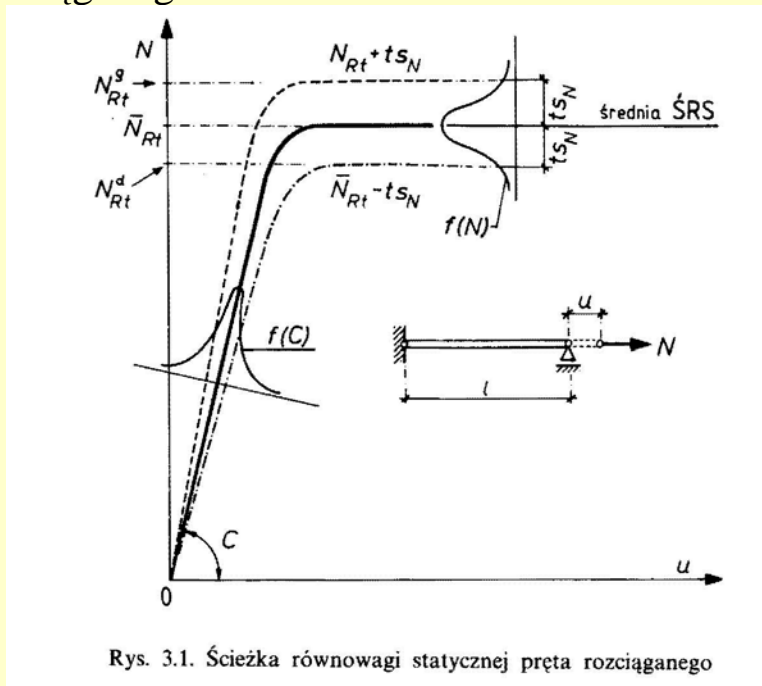
$$s_{Rt} = \sqrt{(\bar{h})^2 s_b^2 + s_h^2 \bar{b}^2 + (\bar{b})^2 s_h^2} \quad (8)$$

Korzystając ze wzorów (3) i (4), można również wyznaczyć parametry losowej nośności pręta ścinanego  $N_{Rt}(\omega)$ , o przekroju czynnym przy ścinaniu  $A_v(\omega)$ , wykonanego z materiału o wytrzymałości na ścinanie  $w_v(\omega)$ .

Na rys. 3.1 pokazano losową ścieżkę równowagi statycznej  $N(u)$  pręta rozciąganego.



Wyróżnić w niej można sprężystą i plastyczną fazę wyężenia elementu rozciąganego.



Rys. 3.1. Ścieżka równowagi statycznej pręta rozciąganego

Dysponując wartością średnią  $\bar{N}_{Rt}(\omega)$  i odchyleniem standardowym  $s_{Rt}$  losowej nośności elementu można oszacować na założonym poziomie tolerancji  $t$  dolną nośność na rozciąganie.

### **Przykład**

Oszacować bezpieczeństwo stalowego płaskownika o losowej szerokości  $b(\omega): (\bar{b}; s_b) = (6; 0,2)$  mm i wysokości  $h(\omega):$

$(\bar{h}; s_h) = (10; 0,3)$  mm, wykonanego z materiału o parametrach

wytrzymałości  $w(\omega): (\bar{w}; s_w) = (300; 15)$  MPa, obciążonego losową siłą rozciągającą  $P(\omega): (\bar{P}; s_p) = (15; 1,59)$  kN.

Wartość średnia i odchylenie standardowe prostokątnego pola przekroju poprzecznego analizowanego płaskownika wynoszą

$$\bar{A} = \bar{h}\bar{b} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ mm}^2$$

$$s_{Rt} = \sqrt{(\bar{b})^2 s_h^2 + s_b^2 s_h^2 + (\bar{h})^2 s_b^2} = \sqrt{6^2 \cdot 0,3^2 + 0,2^2 \cdot 0,3^2 + 10^2 \cdot 0,2^2} = 2,69 \text{ mm}^2$$

Indeks niezawodności (zapasu bezpieczeństwa) tego pręta obciążonego rozciągającą siłą  $P(\omega)$  wynosi

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{P}}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}} = \frac{18 - 15}{\sqrt{1,209^2 + 1,59^2}} = \frac{3}{2,00} = 1,50$$

Z tablicy 1.2 odczytano  $p(t) = p(1,5) = 0,933$ .

W analizowanym przykładzie pręta rozciąganego oszacowane bezpieczeństwo wynosi  $R = 0,933$ , prawdopodobieństwo zaś awarii wynosi 6,7%.

Należy zauważyć, iż deterministyczna interpretacja niezawodności badanego pręta rozciąganego (współczynnik bezpieczeństwa

obliczony dla wartości średnich) daje wartość  $n_0 = \bar{N} / \bar{P} = 1,20$ , co mogłoby sugerować 20-procentowy "zapas" nośności.

### 3.3. Losowa nośność pręta zginanego

Losowa nośność przekroju pręta zginanego

$$M_R(\omega) = W(\omega)w(\omega) \quad (9)$$

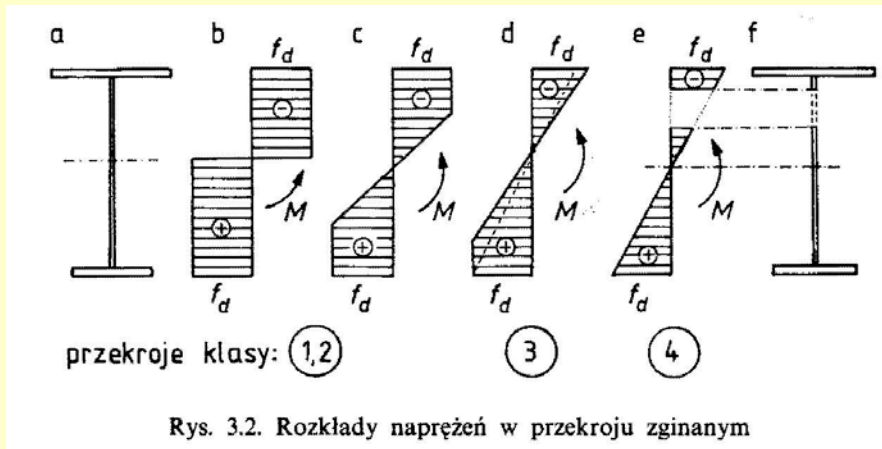
gdzie:

$W(\omega)$  – losowy wskaźnik zginania przekroju,

$w(\omega)$  – losowa wytrzymałość materiału,

Na rys. 3.2 pokazano rozkłady naprężeń w zginanym momentem  $M$  elemencie dwuteowym (rys. 3.2a) w zależności od klasy przekroju poprzecznego.

W przypadku zginania, gdy występuje siła poprzeczna  $V$ , należy pozostawić sprężyste jądro przekroju do przeniesienia naprężeń stycznych  $\tau$  według rys. 3.2c.



W przekrojach klasy 1 i 2 można dopuścić do pełnego uplastycznienia elementu zginanego (rys. 3.2b) i wówczas można przyjąć

$$W(\omega) = W_{pl}(\omega) \quad (10)$$

gdzie  $W_{pl}$  jest losowym wskaźnikiem oporu plastycznego.

Niektóre norma dopuszczają dla zginanych poprzecznie elementów prętowych klasy 1 i 2 ograniczone uplastycznienie przekroju (rys. 3.2e).

We wzorze (9) należy wówczas przyjąć

$$W(\omega) = \alpha_p W_{el}(\omega) \quad (11)$$

w którym:

$$\alpha_p = 0,5(1 + \alpha) \quad (12)$$

$$\alpha_p = \frac{W_{pl}(\omega)}{W_{el}(\omega)} \quad (13)$$

gdzie  $W_{el}(\omega)$  oznacza losowy, sprężysty wskaźnik zginania przekroju.

Przekroje klasy 3 charakteryzują się tym, że ich nośność jest ograniczona początkiem uplastycznienia się strefy ściskanej (rys. 3.2d).

Strefa rozciągana takich przekrojów może być częściowo uplastyczniona.

W losowej analizie zginanych bity metrycznych przekrojów klasy 3 można we wzorze (9) przyjąć

$$W(\omega) = W_{el}(\omega) \quad (14)$$

w którym:

$$\psi = W_{ef}(\omega) / W_{el}(\omega) \quad (15)$$

gdzie  $W_{ef}(\omega)$  oznacza losowy, efektywny wskaźnik zginania przekroju.



Wartość średnią  $\bar{M}_R$  i odchylenie standardowe  $s_{M_R}$  nośności przekroju pręta zginanego opisują zależności

$$\bar{M}_R = \bar{W} \cdot \bar{w} \quad (16)$$

$$s_{M_R} = \sqrt{\bar{W}^2 s_w^2 + s_W^2 \bar{w}^2 + \bar{W}^2 s_W^2} \quad (17)$$

gdzie:

$\bar{W}$ ,  $s_W$  – wartość średnia i odchylenie standardowe losowego wskaźnika zginania przekroju poprzecznego elementu,  
 $\bar{w}$ ,  $s_w$  – wartość średnia i odchylenie standardowe losowej wytrzymałości materiału.

Dla prostokątnego, zginanego przekroju poprzecznego otrzymano następujące wzory na losowe parametry sprężystego wskaźnika zginania

$$\bar{W} = \frac{\bar{b}h^2}{6} \quad (18)$$

$$s_w = \sqrt{\frac{1}{36} [\bar{h}^4 s_b^2 + 4\bar{b}^2 \bar{h}^2 s_h^2]} \quad (19)$$

Wzory można stosować do oszacowania nośności prętów zginanych, gdy są one zabezpieczone przed utratą płaskiej postaci zginania (zwichrzenia).

Losową nośność krytyczną z warunku zwichrzenia elementu zginanego oszacuje się ze wzoru

$$\bar{M}_R = \varphi_L W w \quad (20)$$

gdzie  $\varphi_L$  oznacza współczynnik (zwichrzenia).

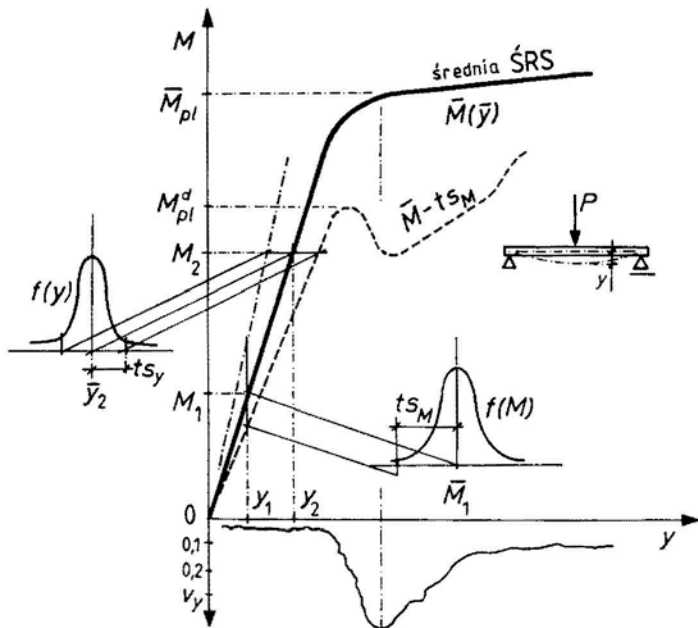
Biorąc pod uwagę, że  $\varphi_L$ ,  $W$  oraz  $w$  są losowe, wtedy wzór (20) przyjmuje postać

$$M_R(\omega) = \varphi_L(\omega) W(\omega) w(\omega) \quad (21)$$

gdzie  $\varphi_L$  jest losowym współczynnikiem niestateczności ogólnej (zwichrzenia).

Sposób podejścia do zagadnienia oszacowania nośności elementu zginanego z uwzględnieniem zwichrzenia jest podobny jak dla przypadku utraty stateczności pręta ściskanego.

Na rys. 3.3 pokazano ścieżkę (zależność obciążenie-przemieszczenie) równowagi statycznej (ŚRS) stalowego pręta zginanego, o przekroju klasy 1, o losowej geometrii przekroju poprzecznego oraz wytrzymałości materiału belki.



Rys. 3.3. Ścieżka równowagi statycznej pręta zginanego o przekroju klasy 1

W dolnej części rys. 3.3 pokazano wykres współczynnika zmienności przemieszczeń  $v_y$  zginanych belek, zidentyfikowany doświadczalnie.

W badaniach, na populacji 5 modeli belek jednoprzęsłowych o przekroju prostokątnym 10x20 mm, mierzono ugięcia.

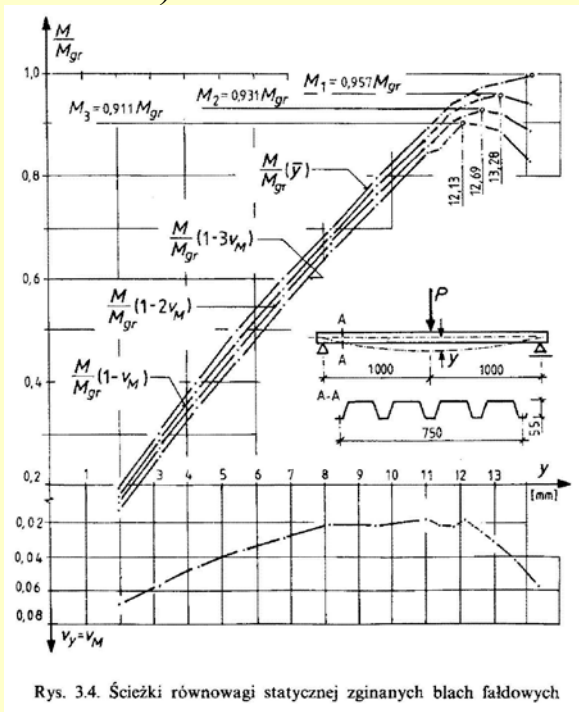
W przedstawionej na rys. 3.3 ŚRS można wyróżnić sprężystą (liniową) i plastyczną fazę wyteżenia ustroju.

Przejściu ze sprężystej w plastyczną fazę wyteżenia ustroju towarzyszy wzrost współczynnika zmienności przemieszczeń.

W opisie można wyróżnić średnią ścieżkę równowagi statycznej (oznaczoną na rys. 3.3 linią grubą) oraz górne i dolne oszacowanie nośności (oznaczone na rys. 3.3 linią przerywaną).

Na rys. 3.3 pokazano ponadto rozkład losowej nośności pręta zginanego  $f(M)$  przy wymuszeniu zdeterminowanego przemieszczenia  $y_1$  oraz rozkład losowego przemieszczenia  $f(y)$  przy zginaniu go zdeterminowanym momentem zginającym  $M_2$ .

Na rys. 3.4 pokazano ścieżki równowagi statycznej zginanego pręta cienkościennego, o przekroju klasy 4 (o ściankach wrażliwych na lokalną utratę stateczności).



Rys. 3.4. Ścieżki równowagi statycznej zginanych blach faldowych

Sporządzono je we współrzędnych  $M/M_{gr}$  -  $y$  (gdzie  $M_{gr}$  oznacza obciążenie graniczne belki mierzone momentem zginającym,  $y$  - ugięcie w środku rozpiętości belki).

Badania przeprowadzono na zginanych jednoprzęsłowych blachach fałdowych, o wysokości profilu (płyty) 55 mm, rozstawie fałd 188 mm i grubościach (ścianek) blach 0,75 mm (5 szt.) i 1,00 mm (5 szt.).

W dolnej części rys. 3.4 pokazano wykres współczynnika zmienności przemieszczeń  $v_y$  zginanych elementów cienkościennych.

W przedstawionych ŚRS można wyróżnić sprężystą nieliniową fazę wyężenia ustroju, charakterystyczną dla zginanych prętów cienkościennych.

Ścieżkę równowagi statycznej zginanych blach fałdowych można opisać modelem nieliniowo-sprężysto-kruchym.

## Przykład

Oszacować nośność graniczną (mierzoną momentem zginającym) przekroju dwuteowego (I 200), dla prognozowanego bezpieczeństwa  $R = 0,99865$  ( $t = 3$ ).

Belka jest wykonana ze stali o parametrach wytrzymałościowych:  $\bar{w} = 332$  MPa i  $\nu_w = 0,09$  (stal St3).

Jej średni sprężysty wskaźnik zginania oraz współczynnik zmienności wskaźnika zginania wynoszą:  $\bar{W} = 214$  cm<sup>3</sup>,  $\nu_w = 0,07$ .  
Analizowany przekrój spełnia warunki przekroju klasy 1.

Losową nośność graniczną przekroju zginanego (moment plastyczny) oszacowano ze wzoru

$$M_{pl}(\omega) = W_{pl}(\omega)w(\omega) = \alpha W_{el}(\omega)w(\omega)$$

gdzie  $\alpha$  oznacza współczynnik rezerwy plastycznej, który przyjęto  $\alpha = 1,14$ .



Średni plastyczny wskaźnik wytrzymałości analizowanego przekroju wynosi

$$\bar{W}_{pl} = \alpha \bar{W} = 1,14 \cdot 214 = 244 \text{ cm}^3$$

odchylenie standardowe obliczono wg wzoru:

$$s_{W_{pl}} = \bar{W}_{pl} v_W = 244 \cdot 0,07 = 17,08 \text{ cm}^3$$

Plastyczna nośność średnia na zginanie belki z I 200, ze stali St3 wynosi

$$\bar{M}_{pl} = \bar{W}_{pl} v_W = 244 \cdot 332 \cdot 10^{-3} \approx 81,0 \text{ kNcm}$$

oraz jej odchylenie standardowe (dla  $s_w = 0,09 \cdot 332 = 30 \text{ MPa}$ ), obliczone według (17) wynosi

$$\begin{aligned} s_{M_{pl}} &= \sqrt{\bar{W}^2 s_w^2 + s_W^2 s_w^2 + \bar{w}^2 s_W^2} = \\ &= \sqrt{(244^2 \cdot 30^2 + 17,08^2 \cdot 30^2 + 332^2 \cdot 17,08^2)}^{-6} = 9,26 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Kwantyl nośności plastycznej zginanego 1200, na poziomie  $p(t = 3) = 0,99865$  wynosi

$$M_0 = \bar{M}_{pl} - t s_{M_{pl}} = 81,0 - 3 \cdot 9,26 = 53,22 \text{ kNm}$$

W analizowanym przypadku kwantyl nośności przekroju zginanego  $M_0$  jest o 34,3% mniejszy od nośności średniej elementu.

### 3.4. Losowa nośność pręta zginanego i rozciąganego

Losową nośność sprężystą przekroju pręta zginanego momentem  $M(\omega)$  i rozciąganego siłą  $N(\omega)$  szacuje się z następującego związku

$$\frac{N(\omega)}{N_{Rt}(\omega)} + \frac{M(\omega)}{M_R(\omega)} \leq 1 \quad (22)$$

gdzie

$N_{Rt}(\omega)$  – losowa, sprężysta nośność graniczna przekroju pręta rozciąganego,

$M(\omega)$  – losowa, sprężysta nośność graniczna przekroju pręta zginanego,

$N(\omega)$  – losowa siła osiowa działająca w przekroju pręta,

$M(\omega)$  – losowy moment zginający działający w przekroju pręta.

W prętach o losowych przekrojach klasy 1 i 2, w których można wykorzystać plastyczną rezerwę nośności, interakcję równoczesnego zginania i rozciągania według opisuje zależność

$$\left( \frac{N(\omega)}{N_{Rt,pl}(\omega)} \right)^\beta + \frac{M(\omega)}{M_{R,pl}(\omega)} \leq 1 \quad (23)$$

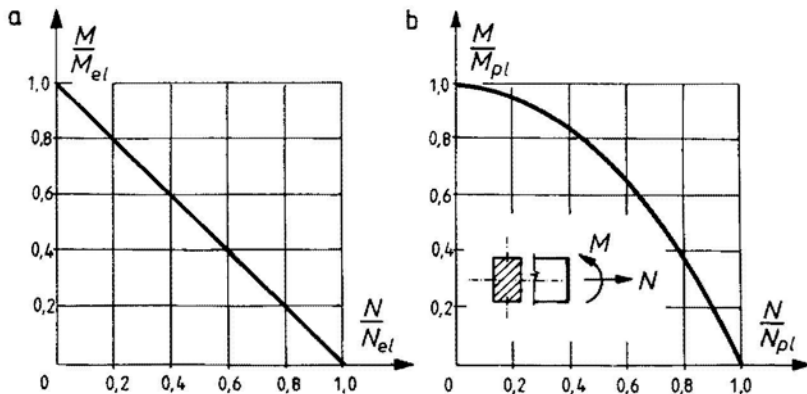
gdzie:

$N_{Rt,pl}(\omega)$  - losowa, plastyczna nośność graniczna przekroju pręta rozciąganego,

$M_{R,pl}(\omega)$  - losowa, plastyczna nośność graniczna przekroju pręta zginanego

Współczynnik  $\beta$  zależy od kształtu przekroju poprzecznego (np. dla prostokąta  $\beta = 2$ ).

Bezwymiarowy wykres interakcji zginania  $M$  i rozciągania  $N$  pręta o przekroju prostokątnym w sprężystym zakresie wyężenia materiału – rys. 3.5a – zależność liniowa.



Rys. 3.5. Krzywe interakcji  $M-N$  zginanych i rozciąganych prostokątnych przekrojów prętów w sprężystej (a) i plastycznej (b) fazie wyężenia

Na rys. 3.5b pokazano interakcyjną zależność  $M-N$  analizowanego przekroju z uwzględnieniem plastycznej rezerwy nośności – zależność nieliniowa.

Jeżeli w przekroju działa znana rozciągająca osiowa siła  $N$ , zredukowaną losową nośność na zginanie w zakresie sprężystym oszacuje się ze wzoru

$$M(\omega) = \left(1 - \frac{N}{N_{Rt}(\omega)}\right) M_R(\omega) \quad (24)$$

Jeżeli znany jest moment zginający przekrój poprzeczny  $M$ , zredukowaną, sprężystą losową nośność na rozciąganie oszacuje się ze wzoru

$$N(\omega) = \left(1 - \frac{M}{M_R(\omega)}\right) N_{Rt}(\omega) \quad (25)$$

Parametry losowych nośności,  $\bar{M}$  i  $s_M$  lub  $\bar{N}$  i  $s_N$  wynoszą

$$\bar{M} = \bar{M}_R \left( 1 - \frac{N}{N_{Rt}} \right) \quad (26)$$

$$\bar{N} = \bar{N}_{Rt} \left( 1 - \frac{M}{\bar{M}_R} \right) \quad (27)$$

$$s_M = \sqrt{[1 - N(\bar{N}_{Rt})^{-1}]s_{M_R}^2 + N\bar{M}_R(\bar{N}_{Rt})^{-2}]^2 s_{N_{Rt}}^2} \quad (28)$$

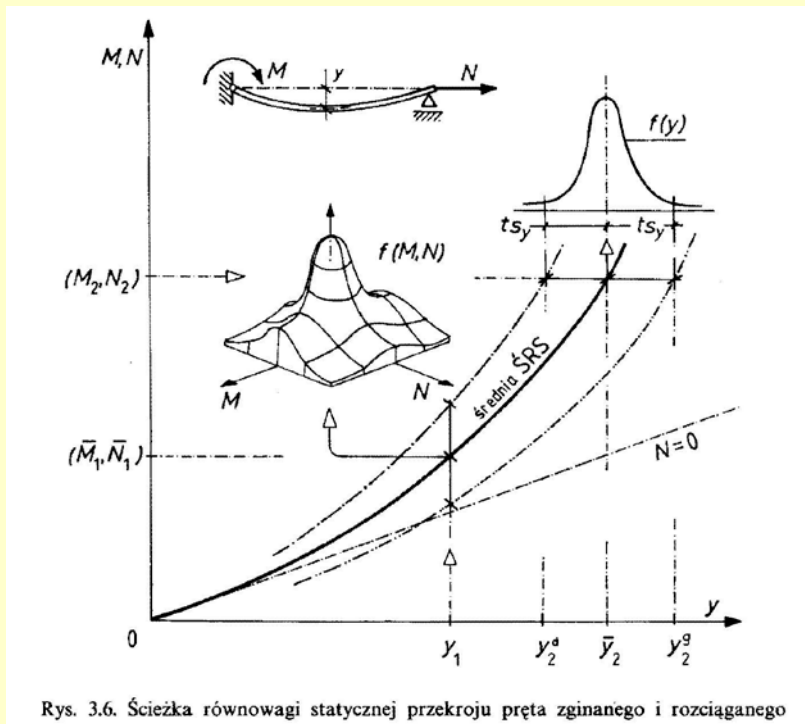
$$s_N = \sqrt{[1 - M(\bar{M}_R)^{-1}]s_{N_{Rt}}^2 + [M\bar{N}_{Rt}(\bar{M}_R)^{-2}]^2 s_{M_R}^2} \quad (29)$$

gdzie

$\bar{M}_R, s_{M_R}$  - średnia i odchylenie standardowe nośności przekroju na zginanie,

$\bar{N}_{Rt}, s_{N_{Rt}}$  - średnia i odchylenie standardowe nośności przekroju na rozciąganie.

Na rys. 3.6 pokazano ścieżkę równowagi statycznej przekroju pręta zginanego i rozciąganego w sprężystym zakresie wyężenia materiału.

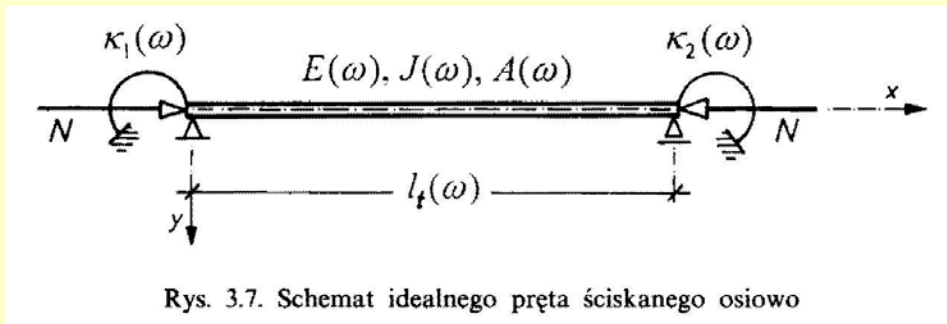


Rys. 3.6. Ścieżka równowagi statycznej przekroju pręta zginanego i rozciąganego



### 3.5. Losowa nośność pręta ściskanego osiowo

Model Eulera pręta idealnego (bez imperfekcji), ściskanego osiowo.



Rys. 3.7. Schemat idealnego pręta ściskanego osiowo

Losowa nośność sprężystą pręta ściskanego osiowo

$$N_{cr}(\omega) = \frac{\pi^2 E(\omega) J(\omega)}{[l(\omega)]^2} \quad (30)$$

gdzie

$J(\omega)$ - losowy moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta  
 $E(\omega)$ - losowy moduł sprężystości podłużnej materiału,  
 $\mu(\omega)$ - losowa długość wyboczeniowa pręta, która wynosi

$$l(\omega) = l_t(\omega) \mu[\kappa_1(\omega), \kappa_2(\omega)] \quad (31)$$

w którym

$l_t(\omega)$ - losowa długość pręta,

$\mu(\omega)$ - losowy współczynnik długości wyboczeniowej pręta, która zależy od losowych charakterystyk  $\kappa_1(\omega)$ ,  $\kappa_2(\omega)$ , opisujących zamocowanie go na końcach.

Średnią sprężystą nośność krytyczną  $\bar{N}_{cr}(\omega)$  takiego pręta można wyznaczyć ze wzoru

$$\bar{N}_{cr}(\omega) = \pi^2 \frac{EJ}{\bar{l}^2} \quad (32)$$

$\bar{E}$  - średni moduł sprężystości podłużnej materiału,

$\bar{J}$  - średni moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta,

$\bar{l}$  - - średnia długość wyboczeniowa pręta.

Odchylenie standardowe  $s_{N_{cr}}$  nośności krytycznej

$$s_{N_{cr}} = \pi^2 \sqrt{\left[\frac{\bar{J}}{\bar{l}^2}\right]^2 s_E^2 + \left[\frac{\bar{E}}{\bar{l}^2}\right]^2 s_J^2 + 4 \left[\frac{\bar{E}\bar{J}}{\bar{l}^3}\right]^2 s_l^2} \quad (33)$$

$s_E$  - odchylenie standardowe modułu sprężystości podłużnej,

$s_J$  - odchylenie standardowe momentu bezwładności przekroju poprzecznego pręta,

$s_l$  - odchylenie standardowe długości wyboczeniowej pręta.

Wzór (33) ma stosunkowo prostą postać, gdyż przyjęto, iż długość wyboczeniowa  $l(\omega)$  jest funkcją jednej zmiennej losowej.

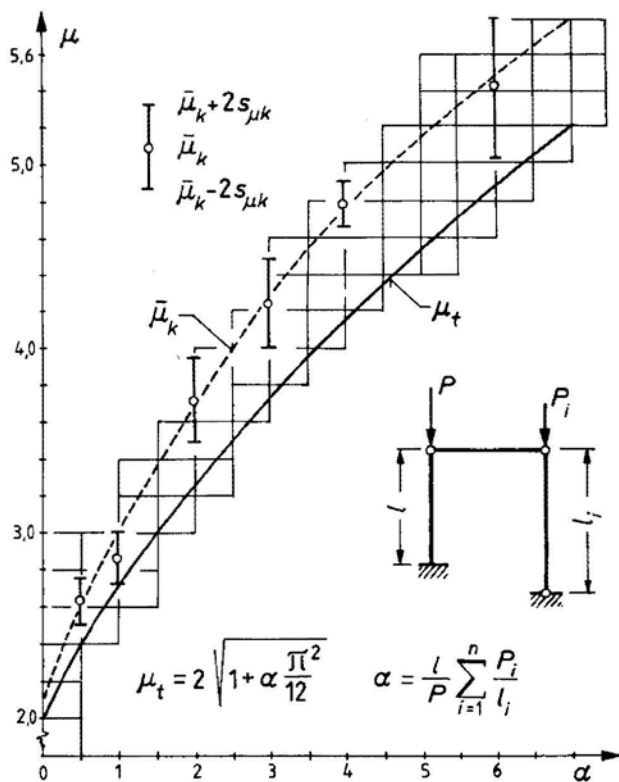
W rzeczywistości długość wyboczeniowa  $l(\omega)$  jest funkcją trzech zmiennych losowych i należy uwzględnić wzór (31).

Tak zwana teoretyczna długość pręta  $l_t$  zazwyczaj charakteryzuje się niedużym współczynnikiem zmienności i jej losowe cechy nie wpływają istotnie na odchylenie standardowe nośności.

Istotna i ważna ze względów bezpieczeństwa jest natomiast właściwa ocena charakterystyk losowego współczynnika długości wyboczeniowej ściskanych prętów  $\mu(\omega) = \mu[\kappa_1(\omega), \kappa_1(\omega)]$ .

Na rys. 3.8 przedstawiono wyniki badań doświadczalnie wyznaczonych zintegrowanych współczynników długości wybozeniowej słupów utwierdzonych sztywno w fundamencie i przegubowo połączonych z rygłem.

Badania przeprowadzono na serii 30 modeli ram przechyłowych składających się z analizowanych słupów, do których dołączono za pośrednictwem rygli słupy przegubowo-przegubowe.



Rys. 3.8. Współczynnik długości wybocheniowej słupów sztywno utwierdzonych ram przechyłowych

Dla rozpatrywanego schematu ramy współczynnik długości wybojeniowej słupów sztywno zamocowanych w fundamencie  $\mu(\omega)$  jest funkcją m.in. losowych mimośrodków przekazywania obciążenia, losowych przemieszczeń głowic słupów, błędów montażowych, wydłużeń termicznych rygli, itp..

W badaniach wyznaczono zintegrowany współczynnik wybojeniowy słupów utwierdzonych  $\bar{\mu}_k$  uwzględniający łącznie wymienione wpływy losowe.

Teoretyczny współczynnik wybojeniowy słupa utwierdzonego  $\mu_t$  jest funkcją obciążenia słupów i geometrii ramy.

Na rys. 3.8 linią ciągłą oznaczono wykres teoretycznego współczynnika długości wybojeniowej  $\mu_t$  linią przerywaną zaś wykres średniego, wyznaczonego doświadczalnie  $\bar{\mu}_k$ .

Doświadczalne współczynniki długości wyboczeniowej analizowanych słupów utwierdzonych rozpatrywanych ram są większe niż współczynniki wyznaczone teoretycznie.

Różnice te rosną w miarę zwiększania parametru  $\alpha$ . Jeśli długości słupów i ich obciążenia są jednakowe ( $\alpha = 1$ ), to  $\mu_t = 2,7$ . Wyznaczona doświadczalnie zaś na poziomie dwóch odchyień standardowych wartość  $\mu_0 = 3,0$  (błąd oszacowania nośności słupów wynosi 23,5%).

Nośność prętów ściskanych jest zagadnieniem znacznie bardziej złożonym niż prezentowany model eulerowski.

W modelu obliczeniowym oszacowania nośności pręta ściskanego należy uwzględnić wyboczenie w zakresie sprężysto-plastycznym, imperfekcje konstrukcyjne, gdyż eulerowskie obciążenie krytyczne dotyczy pręta idealnego i stanowi oszacowanie nośności od góry.



Losową nośność ściskanych prętów stalowych szacuje się według normy PN-90/B-03200 ze wzoru

$$N_{Rc}(\omega) = \varphi(\omega) A(\omega) w(\omega) \quad (34)$$

gdzie

$A(\omega)$ ,  $w(\omega)$  - jak w (2),

$\varphi(\omega)$  - losowy współczynnik wyboczeniowy.

Losowy współczynnik wyboczeniowy prętów ściskanych zależy od długości elementu oraz losowych charakterystyk jego przekroju poprzecznego i zamocowania go na końcach

$$\varphi(\omega) = \varphi[\kappa_1(\omega), \kappa_2(\omega), l_t(\omega), i(\omega)] = \varphi[\lambda(\omega), n] \quad (35)$$

gdzie:

$\kappa_1(\omega)$ ,  $\kappa_2(\omega)$  - współczynniki zamocowania pręta w węzłach,

$i(\omega)$  - losowy promień bezwładności przekroju pręta,

$\lambda(\omega)$  - losowa smukłość pręta,

$l_t(\omega)$  - jak we wzorze (31).

Współczynnik wyboczeniowy  $\varphi$  szacuje się na podstawie smukłości, która w przypadku uwzględnienia losowych cech pręta ma postać

$$\lambda(\omega) = \frac{\mu(\omega)l_t(\omega)}{i(\omega)} \quad (36)$$

Losowe imperfekcje konstrukcyjne (np. wstępne odchylenia od osi podłużnych prętów, mimośrodowość przekazywania obciążeń) i technologiczne (np. naprężenia spawalnicze, walcownicze) uwzględnione są w postaci uogólnionego parametru imperfekcji  $n$  i odpowiednie wykalibrowanie współczynnika wyboczeniowego prętów ściskanych  $\varphi$  w stosunku do krzywej Eulera.

Według normy PN-90/B-3200 współczynnik wyboczeniowy  $\varphi$  jest parametryczną funkcją smukłości względnej

$$\varphi(\lambda_1) = 1 \quad \text{dla} \quad \lambda_1 < 0,15 \quad (37)$$

$$\varphi(\lambda_1) = [1 + (\lambda_1)^{2n}]^{\frac{1}{n}} \quad \text{dla} \quad \lambda_1 > 0,15 \quad (38)$$

gdzie  $n$  - uogólniony parametr imperfekcji (uwzględniający niedoskonałości geometryczne, strukturalne i technologiczne):

$n = 2,0$  dla krzywej wyboczeniowej a,

$n = 1,6$  dla krzywej wyboczeniowej b,

$n = 1,2$  dla krzywej wyboczeniowej c,

$\lambda_1$  - smukłość względna, która wynosi

$$\lambda_1 = \bar{\lambda} = \lambda / \lambda_p \quad (39)$$

$$\lambda_p = 84 \sqrt{215 / f_d} \quad (40)$$

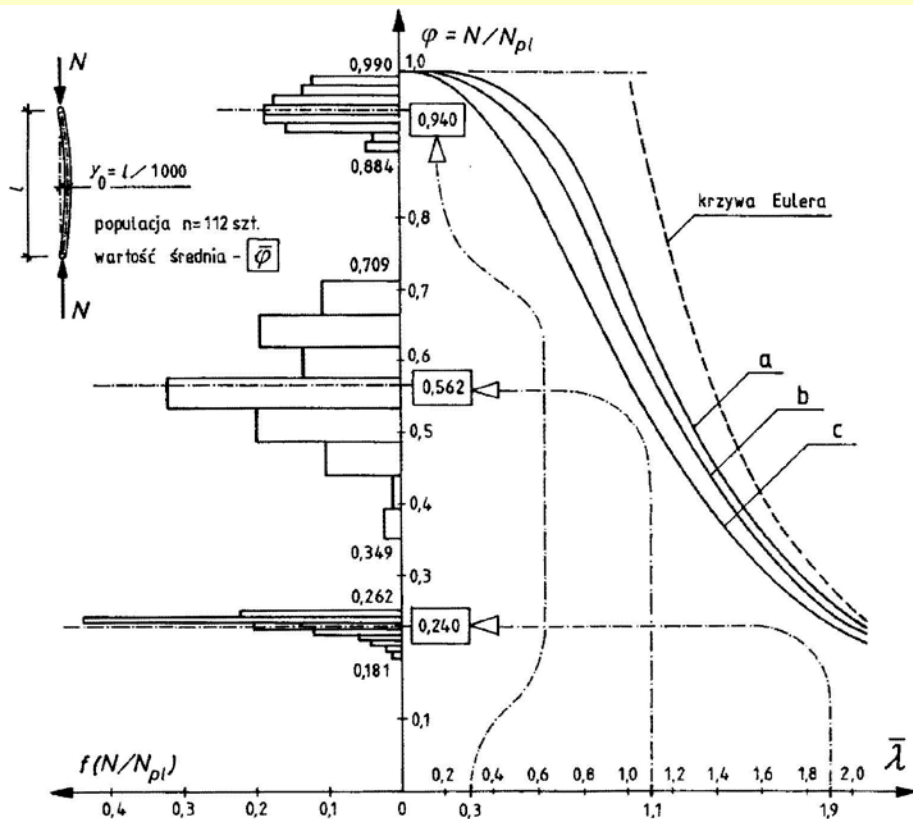
$$\lambda = \frac{\mu l_t}{i} \quad (41)$$

przy czym w normie  $f_d$  oznacza wytrzymałość obliczeniową stali.

W normie PN-90/B-3200 przyjęto dla ściskanych prętów trzy krzywe wyboczeniowe (a, b i c) w zależności od kształtu przekroju, wrażliwości na wstępne imperfekcje geometryczne, technologii wykonania - wpływu imperfekcji technologicznych (naprężeń walcowniczych, spawalniczych).

Przedstawiono je w prawej części rys. 3.9.

Przedstawione na rys. 3.9 histogramy uzyskano na podstawie badań 112 prętów ze wstępnymi imperfekcjami osi podłużnej w postaci wygięć o strzałce  $y_0 = l / 1000$  (gdzie  $l$  jest długością elementu).



Rys. 3.9. Typowe histogramy nośności [27] i krzywe wyoboczeniowe prętów ściskanych wg [101]

Ściskane pręty *krótkie* (o małych smukłościach) wyczerpują swą nośność w wyniku uplastycznienia, pręty *długie* (o dużych smukłościach) ulegają wyboczeniu sprężystemu.

Większość prętów ściskanych spotykanych w konstrukcjach budowlanych charakteryzuje się smukłościami pośrednimi i mogą one tracić nośność w wyniku sprężysto-plastycznej formy wyboczenia.

Na nośność graniczną prętów ściskanych o takich smukłościach mają bardzo duży wpływ wstępne imperfekcje, co przedstawiono w lewej części rys. 3.9.

Na rysunku tym pokazano histogramy współczynnika wyboczeniowego  $\varphi$  (wyznaczonego jako stosunek nośności granicznej  $N$  do nośności plastycznej  $N_{pl}$  prętów ściskanych o trzech charakterystycznych smukłościach).

Badane pręty krótkie o smukłości względnej 0,30, pręty długie o smukłości względnej 1,90 oraz pręty o pośredniej smukłości względnej 1,10.

Wpływ wstępnego wygięcia osi podłużnej prętów  $y_0$  na losową nośność graniczną elementów ściskanych może stanowić model wyjściowy do analizy następstw innego typu imperfekcji.

Z analizy przedstawionych na rys. 3.9 histogramów wynika, że gęstość rozkładu nośności prętów ściskanych ze wstępnymi imperfekcjami, o smukłościach najczęściej spotykanych w konstrukcjach budowlanych, cechuje duży rozrzut w porównaniu z prętami krępyimi i smukłymi.

Średnia oraz odchylenie standardowe smukłości pręta ściskanego opisanej zależnością (36) wynoszą

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\mu}\bar{l}_t}{\bar{i}} \quad (42)$$

$$s_\lambda = \sqrt{\left[\frac{\bar{l}_t}{\bar{i}}\right]^2 s_\mu^2 + \left[\frac{\bar{\mu}}{\bar{i}}\right]^2 s_{l_t}^2 + 4\left[\frac{\bar{\mu}\bar{l}_t}{\bar{i}}\right]^2 s_i^2} \quad (43)$$

gdzie:

$\bar{l}_t, s_{l_t}$  - wartość średnia i odchylenie standardowe długości pręta,

$\bar{\mu}, s_\mu$  - wartość średnia i odchylenie standardowe współczynnika długości wyboczeniowej pręta,

$\bar{i}, s_i$  - wartość średnia i odchylenie standardowe promienia bezwładności przekroju pręta.



Dysponując parametrami losowej smukłości pręta  $\bar{\lambda}$  i  $s_\lambda$  można ze wzoru (38) wyznaczyć parametry losowego współczynnika wyboczeniowego  $\bar{\varphi}$  oraz  $s_\varphi$ .

Średnia nośność  $\bar{N}_{Rc}$  i odchylenie standardowe  $s_{N_{Rc}}$  nośności pręta ściskanego wynoszą

$$\bar{N}_{Rc} = \bar{\varphi} \bar{A} \bar{w} \quad (44)$$

$$s_{N_{Rc}} = \sqrt{\bar{\varphi}^2 \bar{A}^2 s_w^2 + \bar{A}^2 \bar{w}^2 s_\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 \bar{w}^2 s_A^2} \quad (45)$$

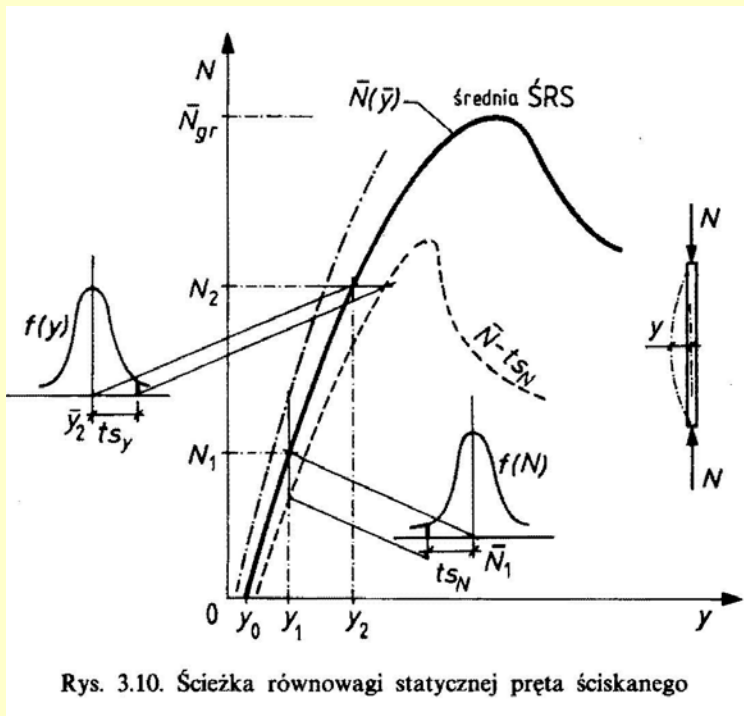
gdzie:

$\bar{\varphi}$ ,  $s_\varphi$  - wartość średnia i odchylenie standardowe współczynnika wyboczeniowego,

$\bar{A}$ ,  $s_A$  - wartość średnia i odchylenie standardowe pola przekroju poprzecznego pręta,

$\bar{w}$ ,  $s_w$  - wartość średnia i odchylenie standardowe wytrzymałości materiału.

Na rys. 3.10 pokazano doświadczalnie zidentyfikowaną, o parametrach  $\bar{N}$ ,  $s_N$  ścieżkę równowagi statycznej (ŚRS) pręta ściskanego.



Rys. 3.10. Ścieżka równowagi statycznej pręta ściskanego

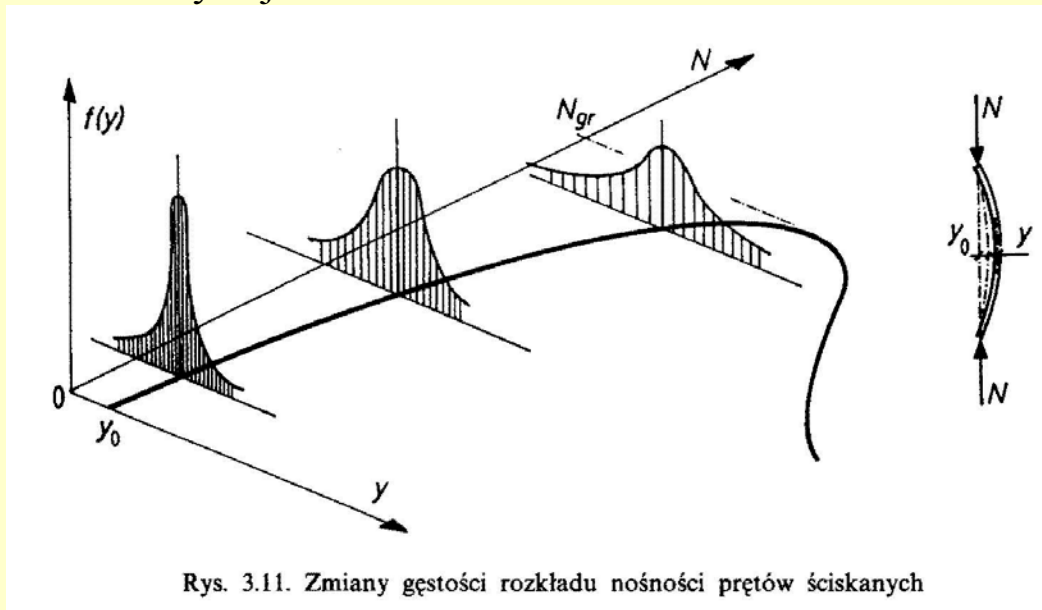
Badano pręty o losowych cechach geometrycznych przekroju poprzecznego oraz wytrzymałościowych materiału elementu ze wstępnymi losowymi imperfekcjami geometrycznymi osi podłużnej  $y_0$ .

Losowe cechy analizowanych prętów ściskanych sprawiają, iż ścieżki równowagi statycznej poszczególnych prętów są realizacjami funkcji losowej  $f(N)$ .

Wyróżnić w niej można: średnią ŚRS (oznaczoną na rys. 3.10 linią grubą) oraz górne i dolne oszacowanie nośności (oznaczone na rys. 3.10 linią przerywaną).

Na rys. 3.10 pokazano też rozkład losowej nośności pręta ściskanego  $f(N)$  przy wymuszaniu przemieszczeń poprzecznych osi podłużnej elementu  $y_1$  oraz rozkład losowych ugięć  $f(y)$  przy ściskaniu pręta siłą podłużną  $N_2$ .

Na uwagę zasługuje również fakt, iż rozkład właściwości losowej ścieżki równowagi statycznej pręta ściskanego zmienia się wraz ze zmianą jego obciążenia, co pokazano na rys. 3.11. Wraz ze wzrostem obciążenia ściskającego prętów obserwuje się większy rozrzut krzywej ŚRS.



Rys. 3.11. Zmiany gęstości rozkładu nośności prętów ściskanych

### Przykład 3.3

Oszacować średnią  $\bar{N}_{cr}$ , odchylenie standardowe  $s_{N_{cr}}$ , współczynnik zmienności  $v_N$  oraz kwantyl  $N_0$  na poziomie tolerancji  $t = 3$  obciążenia krytycznego pręta ściskanego osiowo.

Pręt zamocowany jest obustronnie przegubowo ( $\mu = 1$ ).

Losowe parametry pręta wynoszą

$$l(\omega): (\bar{l}, s_l) = (6000 \text{ mm}, 120 \text{ mm});$$

$$E(\omega): (\bar{E}, s_E) = (206000 \text{ MPa}, 3000 \text{ MPa});$$

$$J(\omega): (\bar{J}, s_J) = (652 \text{ cm}^4, 40 \text{ cm}^4).$$

Sprawdzić bezpieczeństwo badanego pręta, gdy jest on obciążony losową siłą ściskającą o parametrach  $P(\omega): (\bar{P}, s_P)$  (300 kN, 44 kN).

Średnie obciążenie krytyczne pręta ściskanego osiowo (32) wynosi

$$\bar{N}_{cr} = \pi^2 \frac{\bar{E}\bar{J}}{\bar{l}^2} = \pi^2 \frac{206000 \cdot 652 \cdot 10^{-1}}{600^2} = 368,2 \text{ kN}$$

Odchylenie standardowe (33) oraz współczynnik zmienności obciążenia krytycznego wynoszą

$$\begin{aligned} s_{N_{cr}} &= \pi^2 \sqrt{\left[\frac{\bar{J}}{\bar{l}^2}\right]^2 s_E^2 + \left[\frac{\bar{E}}{\bar{l}^2}\right]^2 s_J^2 + 4\left[\frac{\bar{E}\bar{J}}{\bar{l}^3}\right]^2 s_l^2} = \\ &= \pi^2 \sqrt{\left[\left(\frac{652}{600^2}\right)^2 3000^2 + \left(\frac{206000}{600^2}\right)^2 40^2 + 4\left(\frac{206000 \cdot 652}{600^3}\right)^2 12^2\right] 10^{-2}} \\ &= 27,49 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$v_N = \frac{s_{N_{cr}}}{\bar{N}_{cr}} = \frac{27,49}{368,2} = 0,075$$

Kwantyl nośności krytycznej analizowanego pręta ściskanego na poziomie  $t = 3$  wynosi

$$N_0 = \bar{N}_{cr} - 3s_{N_{cr}} = 368,2 - 3 \cdot 27,49 = 285,73 \text{ kN}$$

Bezpieczeństwo badanego pręta obciążonego losową, osiową siłą ściskającą o parametrach  $P(\omega)$ : (300,44) kN wyznaczono obliczając indeks niezawodności Cornella

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{P}}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}} = \frac{368,2 - 300}{\sqrt{27,49^2 + 44^2}} = 1,30$$

Z tablicy rozkładu normalnego odczytano  $p(t) = p(1,3) = 0,903$ . Bezpieczeństwo badanego pręta wynosi  $R = 0,903$ , prawdopodobieństwo zaś awarii wynosi 9,7%.

W interpretacji deterministycznej współczynnik bezpieczeństwa obliczony dla wartości średnich wynosi  $n = \bar{N} / \bar{P} = 1,23$ , co sugerowałoby, że analizowany element ściskany ma 23-procentowy "zapas" nośności.

W przedstawionym przykładzie duże prawdopodobieństwo awarii ( $A = 0,097$ ) wynika m.in. z dużej wartości współczynnika zmienności obciążenia ściskającego, który wynosił  $v_P = 14,7\%$ .

Aby prognozowane bezpieczeństwo analizowanego pręta ściskanego wynosiło  $R = 0,99865$  (na poziomie trzech odchyłeń standardowych), należałoby (przy założonym odchyleniu standardowym obciążenia  $s_X = s_P = 44$  kN) obciążyć go siłą, o wartości średniej  $\bar{X}$ , którą oszacowano w następujący sposób

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{X}}{\sqrt{s_N^2 + s_X^2}} = 3$$

$$\bar{X} = \bar{N} - t\sqrt{s_N^2 + s_X^2} = 368,2 - 3\sqrt{27,49^2 + 44^2} = 212,1 \text{ kN}$$

Dla średniego obciążenia  $\bar{X} = 212$  kN i jego odchylenia standardowego  $s_X = 44$  kN, prawdopodobieństwo awarii badanego pręta ściskanego wynosi  $A = 0,00135$ .

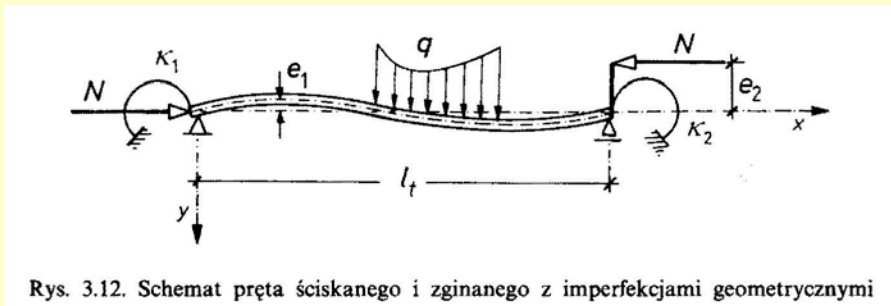


### 3.6. Losowa nośność pręta ściskanego i zginanego

Rozpatruje się losową nośność pręta o losowych charakterystykach geometrycznych przekroju poprzecznego:  $A(w)$ ,  $J(w)$ ,  $W(w)$ , obciążonego momentem  $M(w)$  i obciążeniem ściskającym  $N(w)$  działającym na mimośrodku  $e(w)$ .

Mimośród obciążenia ściskającego  $e(w)$  może być następstwem losowej geometrii osi podłużnej pręta ściskanego  $e_1(\omega)$ , a także losowego, mimośrodowego przyłożenia obciążenia  $e_2(\omega)$ .

Schemat analizowanego pręta pokazano na rys. 3.12.



Rys. 3.12. Schemat pręta ściskanego i zginanego z imperfekcjami geometrycznymi

Wyteżenia opisuje związek interakcyjny

$$\frac{N(\omega)}{N_c(\omega)} + \frac{1}{1 - \frac{N(\omega)}{N_{cr}(\omega)}} \frac{\beta_M(\omega)M(\omega) + N(\omega)e(\omega)}{M_R(\omega)} \leq 1 \quad (46)$$

$N(\omega)$  – losowa siła ściskająca,

$M(\omega)$  – losowy moment zginający wyznaczony według teorii pierwszego rzędu,

$N_c(\omega)$  – losowa nośność plastyczna przekroju ściskanego,

$M_R(\omega)$  – losowa nośność przekroju na zginanie,

$N_{cr}(\omega)$  – losowa nośność krytyczna pręta ściskanego,

$\beta_M(\omega)$  – współczynnik zależny od kształtu wykresu momentu zginającego na długości pręta,

$e(\omega)$  – losowy mimośród obciążenia ściskającego (suma wstępnego wygięcia osi podłużnej pręta  $e_1(\omega)$  i mimośrodu przyłożenia obciążenia  $e_2(\omega)$ ).

Z równania (1) dla znanego momentu zginającego  $M$  można oszacować losową nośność na ściskanie  $N(\omega)$  lub dla znanej wartości siły ściskającej  $N$  – losową nośność na zginanie  $M(\omega)$ .

Zagadnienie interakcyjnej nośności prętów ściskanych i zginanych jest jednym z bardziej skomplikowanych problemów wytrzymałościowych.

Na jego złożoność składa się kilka zjawisk, które są interakcyjnie połączone:

- stateczność ogólna pręta ściskanego (wyboczenie),
- utrata płaskiej postaci zginania (zwichrzenie),
- zmniejszenie nośności granicznej w stosunku do teoretycznego oszacowania obciążenia krytycznego pręta ściskanego (wpływ imperfekcji geometrycznych i technologicznych na utratę stateczności),
- zapasy nośności plastycznej pręta zginanego,
- wpływ przemieszczeń na wielkość sił wewnętrznych w pręcie,
- wpływ rozkładu momentu zginającego na długości pręta ściskanego na jego nośność.

Rozwiązanie zagadnienia interakcyjnej nośności zginanych i ściskanych prętów cienkościennych dla różnych kombinacji obciążenia (kształtu momentu zginającego na długości pręta) oraz różnych warunków brzegowych zamocowania elementu na podporach podał Z. Kowal w

Kowal Z., Szychowski; *Nośność graniczna prętów ściskanych pod interakcyjnym obciążeniem poprzecznym*, Inżynieria i Budownictwo nr 7/1996, s. 399-404.

Zagadnienie rozwiązano wprowadzając parametryczny moment graniczny pręta  $M_k$ , który jest funkcją obciążenia ściskającego  $N$

$$M_k = (f_y - N / A)W \quad (47)$$

gdzie:

$A$ ,  $W$  – pole przekroju poprzecznego i wskaźnik zginania przekroju pręta,

$f_y$  – granica plastyczności stali.

Dla pręta zamocowanego obustronnie przegubowo, ściskanego siłą  $N$  i zginanego równomiernym obciążeniem poprzecznym  $q$  otrzymano zależność interakcyjną w postaci

$$\frac{M}{M_k} = \frac{N}{N_{cr}} \frac{\pi^2}{8} \frac{\cos\left(0,5\pi\sqrt{N/N_{cr}}\right)}{1 - \cos\left(0,5\pi\sqrt{N/N_{cr}}\right)} \quad (48)$$

gdzie:

$M = 0,125ql^2$  – moment zginający w środku pręta,

$N_{cr} = \pi^2 EI / l^2$  – nośność krytyczna pręta.

Zaproponowane przez Z. Kowala [41] podejście do wyznaczania interakcyjnej nośności elementów ściskanych i zginanych może być zastosowane w przypadku szacowania losowej nośności tak wyężonych prętów.

Wówczas wzory (2) i (3) będą miały następującą postać

$$M_k(\omega) = (f_y(\omega) - N(\omega) / A(\omega))W(\omega) \quad (49)$$

$$\frac{M(\omega)}{M_k(\omega)} = \frac{N(\omega)}{N_{cr}(\omega)} \frac{\pi^2}{8} \frac{\cos\left(0,5\pi\sqrt{N(\omega) / N_{cr}(\omega)}\right)}{1 - \cos\left(0,5\pi\sqrt{N(\omega) / N_{cr}(\omega)}\right)} \quad (50)$$

We wzorach (4) i (5) należy przyjąć:

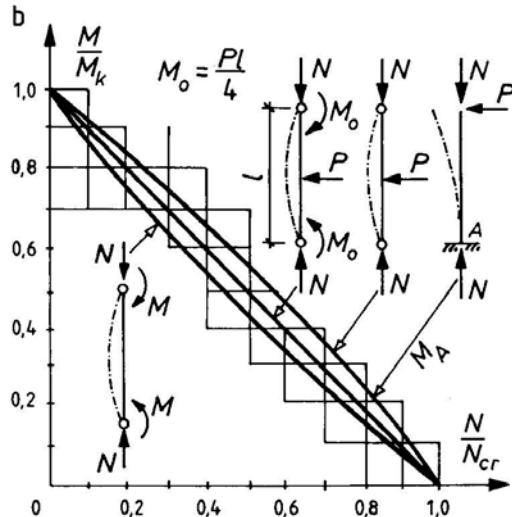
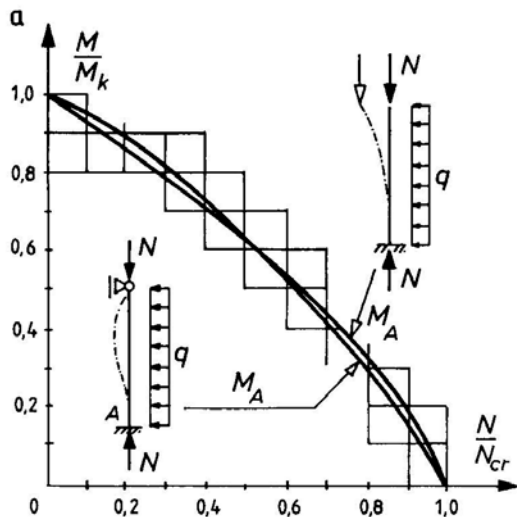
$A(\omega)$ ,  $W(\omega)$  – losowe pole przekroju poprzecznego i losowy wskaźnik zginania przekroju pręta,

$f_y(\omega)$  – losową granicę plastyczności stali

$M(\omega)$  – losowy moment zginający w środku pręta,

$N_{cr}(\omega)$  – losową nośność krytyczną pręta.

Graficzną interpretację krzywych interakcji pokazano na rys. 3.13.



Rys. 3.13. Krzywe interakcji  $M$ - $N$  prętów cienkościennych ściskanych i zginanych [41]

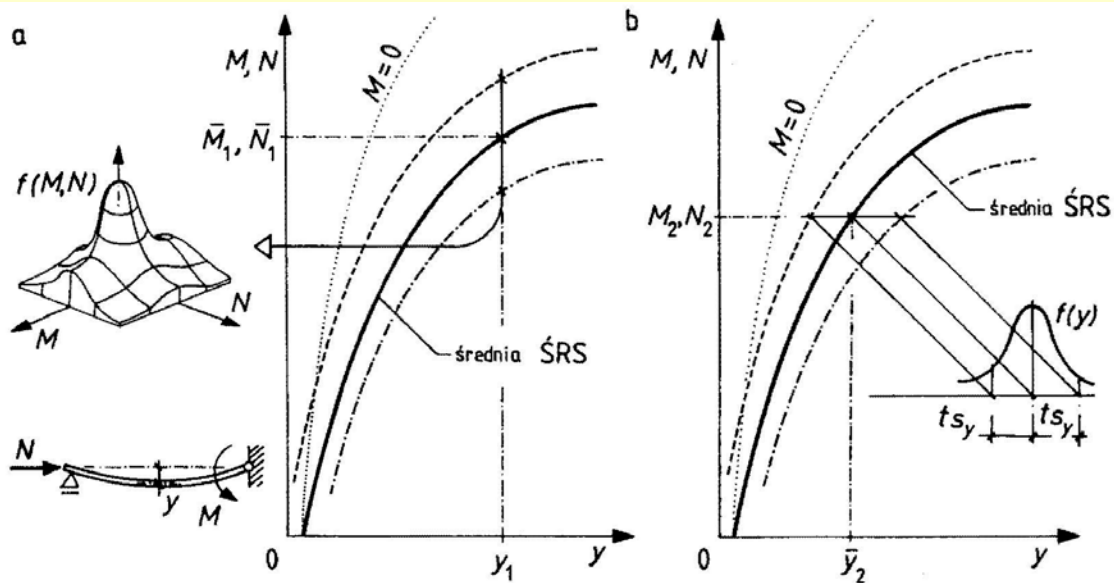
Krzywe interakcji sporządzono w bezwymiarowych współrzędnych  $M / M_k$  i  $N / N_{cr}$  gdzie  $N_{cr}$  zaś jest eulerowskim obciążeniem krytycznym pręta.



Podane na rys. 3.13 krzywe interakcji prętów cienkościennych przy współdziałaniu siły osiowej i momentu zginającego różnią się między sobą w zależności od kombinacji obciążeń zginających i ściskających oraz różnych warunków brzegowych podparcia pręta.

Z porównania krzywych interakcji wynika, że zależą one silnie od rozkładu momentu zginającego na długości pręta ściskanego.

Na rys. 3.14 pokazano ścieżkę równowagi statycznej pręta ściskanego i zginanego w sprężystym zakresie wyężenia materiału.



Rys. 3.14. Ścieżki równowagi statycznej pręta ściskanego i zginanego

Losową nośność elementów ściskanych i zginanych według ideologii normy projektowania konstrukcji stalowych PN-90jB-03200 można oszacować z zależności

$$\frac{N(\omega)}{N_{Rc}(\omega)} = \frac{\beta M(\omega)}{M_R(\omega)} = 1 - \Delta(\omega) \quad (51)$$

gdzie:

$\beta$  – współczynnik zależny od kształtu wykresu momentu zginającego działającego wzdłuż osi pręta (według PN-90/B-03200),

$\Delta(\omega)$  – współczynnik poprawkowy zależny od parametrów wyężenia i geometrii pręta (według PN-90/B-03200).

### 3.7. Losowa nośność konstrukcji jako iloczyn zmiennych losowych o różnych rozkładach funkcji gęstości

Analizowane w poprzednich podrozdziałach proste przypadki losowej nośności elementów (np. prętów rozciąganych, zginanych, ścinanych) można opisać iloczynem dwóch czynników losowych

$$N(\omega) = C(\omega)w(\omega) \quad (52)$$

gdzie:

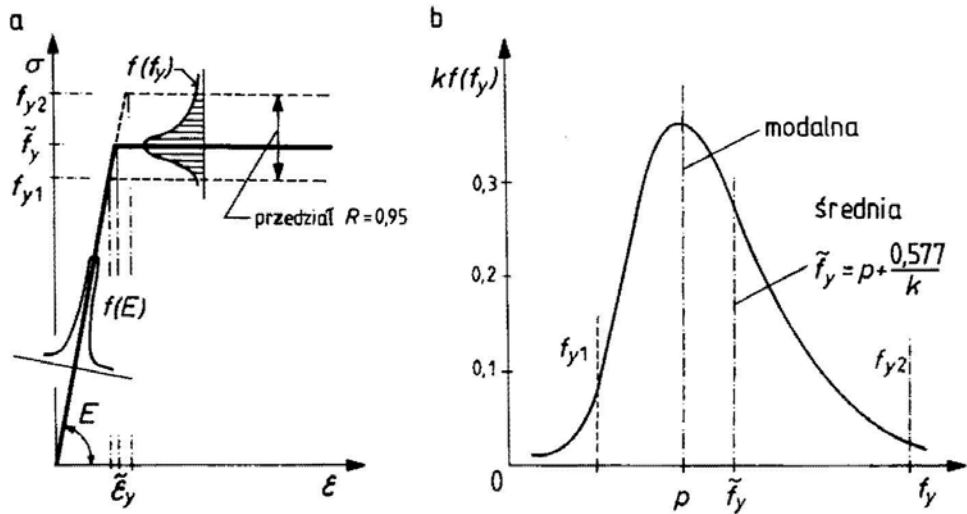
$C(\omega)$  – losowa charakterystyka geometryczna przekroju poprzecznego elementu (np.: pole przekroju poprzecznego  $A(\omega)$ , wskaźnik zginania  $W(\omega)$ , pole części przekroju czynnego przy ścinaniu  $A_v(\omega)$  w zależności od sytuacji obliczeniowej),  
 $w(\omega)$  – losowa wytrzymałość materiału,

Zakładając sprężysto-plastyczny model wyężenia materiału, w granicznym stanie nośności elementu przyjmuje się  $w(\omega) = f_y(\omega)$ , gdzie  $f_y$ , oznacza granicę plastyczności materiału.

Sprężysto-plastyczny model materiału (zależność  $\sigma - \varepsilon$ ) opisują dwa parametry: granica plastyczności  $f_y$  i moduł sprężystości podłużnej  $E$ .

Losowa zmienność modułu sprężystości stali  $E$  jest nieduża i można w analizach przyjąć  $E = \text{const}$  (z badań wynika, iż  $\nu_E < 0,015$ ), (rys. 3.15a).

Rozproszenie granicy plastyczności stali natomiast uzyskiwane w badaniach eksperymentalnych jest zdecydowanie większe (rys. 3.15a i b)



Rys. 3.15. Wykres  $\sigma$ - $\epsilon$  stali (a) oraz losowy, niesymetryczny rozkład granicy plastyczności stali (b)

Z badań statystycznych prób rozciągania stali wynika, że granicę plastyczności materiału  $f_y$ , opisuje się rozkładami niesymetrycznymi (na przykład rozkładem logarytmiczno-normalnym, Gumbela).

Jeśli przyjmie się rozkład niesymetryczny Gumbela, to gęstość prawdopodobieństwa opisuje funkcja

$$f(f_y) = ke^{-k(f_y-p)} - e^{k(f_y-p)} \quad (53)$$

gdzie:

$p$  – wartość modalna granicy plastyczności stali,

$k$  – współczynnik dyspersji granicy plastyczności stali.

Estymatorami rozkładu Gumbela są wartość modalna  $p$  i współczynnik dyspersji (rozrzutu)  $k$ .

Wartość średnia (centralna) i odchylenie standardowe granicy plastyczności stali opisują zależności

$$\tilde{f}_y \cong p + \frac{0,577}{k} \quad (54)$$

$$s_{f_y} \cong \frac{1,282}{k} \quad (55)$$

Na rysunku 3.15b przedstawiono gumbelowski rozkład granicy plastyczności stali, gdzie oznaczono wartość średnią ( $\bar{p}$ ), wartość modalną oraz przedział górnej i dolnej granicy plastyczności  $f_{y1}$  i  $f_{y2}$  dla 2,5% ryzyka wystąpienia materiału słabszego (95% wartości  $f_y$  znajduje się w przedziale  $f_{y1}, f_{y2}$ ).

$$f_{y1} = \bar{p} - 1,3 / k \quad (56)$$

$$f_{y2} = \bar{p} + 3,7 / k \quad (57)$$

Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego elementów  $C(\omega)$  są funkcjami losowymi  $f(C)$ , których zmienność można aproksymować rozkładem normalnym.



Zmienna losowa, o rozkładzie normalnym, charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego elementów jest określona wzorem

$$f(C) = \frac{1}{s_C \sqrt{2\pi}} e^{-(C-\bar{C})^2 / 2s_C^2} \quad (58)$$

$\bar{C}$  – wartość średnia charakterystyki geometrycznej przekroju,  
 $s_C$  – odchylenie standardowe charakterystyki geometrycznej przekroju.

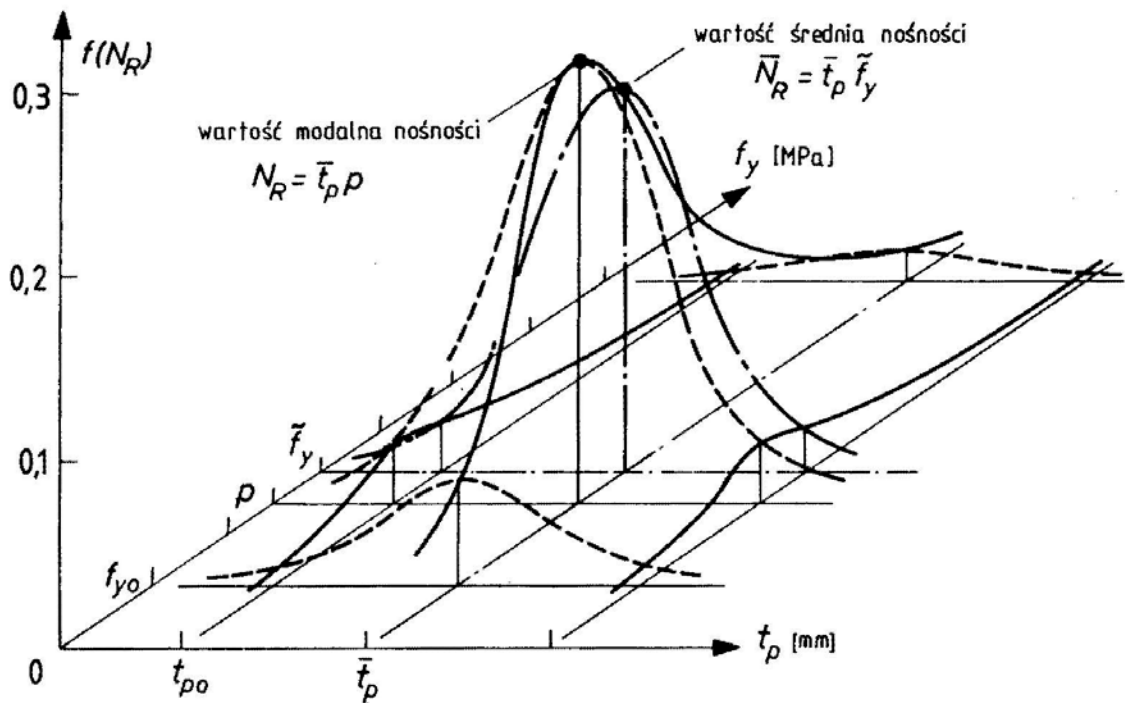
Losową nośność według wzoru (7) (dla  $w(\omega) = f_y(\omega)$ ) opisuje zależność

$$f(N) = f(C)f(f_y) \quad (59)$$

Po uwzględnieniu zależności (8) i (13) rozkład prawdopodobieństwa losowej nośności elementu według wzoru (7) opisuje funkcja

$$f(N) = \frac{k}{s_c \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{C - \bar{C}}{s_c} \right)^2 \right] - k(f_y - p) - e^{k(f_y - p)} \quad (60)$$

Na rys. 3.16 pokazano dwuparametrową, trójwymiarową funkcję gęstości (15) losowej nośności  $f(N)$  analizowanego elementu, którego losową charakterystykę przekroju poprzecznego opisano rozkładem normalnym, granicę plastyczności stali zaś rozkładem niesymetrycznym Gumbela.



Rys. 3.16. Dwuwymiarowa funkcja gęstości losowej nośności stalowych zbiorników [13]

Funkcja powierzchni gęstości rozkładu losowej nośności elementu (15) może być wykorzystana do szacowania bezpieczeństwa np. do analizy uszkodzonych korozyjnie stalowych zbiorników walcowych.

Losowa nośność graniczna płaszcza zbiornika  $N_R(\omega)$  jest funkcją losowej grubości płaszcza zbiornika  $t_p(\omega)$  i losowej granicy plastyczności  $f_y(\omega)$ .

Zakładając, iż współczynnik wytrzymałości spoiny czołowej  $\alpha$  nie jest losowy, nośność płaszcza walcowych zbiorników  $N_R(\omega)$  opisuje zależność

$$N_R(\omega) = \alpha t_p(\omega) f_y(\omega) \quad (61)$$

Losowe cechy granicy plastyczności stali  $f_y$  opisano rozkładem niesymetrycznym Gumbela, a grubości płaszczy zbiorników  $t_p$  można aproksymować rozkładem normalnym.