

Wykłady opracowano na podstawie książek:

Antoni Biegus

Probabilistyczna analiza konstrukcji

PWN 1999

Szczepan Woliński, Krystyna Wróbel

Niezawodność konstrukcji budowlanych

Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej

2001

5.2.5. Nośność graniczna prętowych systemów konstrukcyjnych

Do zamiany układu prętowego, statycznie wyznaczalnego w układ geometrycznie zmienny wystarcza, aby nastąpiło wyczerpanie nośności jednego dowolnego elementu sprawczego ustroju.

Aby taki układ prętowy o jedynie osiowym (N) wyężeniu elementów przestał być sprawny, musi wystąpić na przykład w kratownicy wyboczenie pręta ściskanego, rozerwanie pręta rozciąganego lub zniszczenie węzła.

W przypadku statycznie wyznaczalnych belek i ram, w prętowych elementach występują przekrojowe siły wewnętrzne M , N , V i zmiana ich w mechanizmy polega na wystąpieniu w dowolnym przekroju (w przęśle, w węźle lub w styku) jednego przegubu plastycznego.

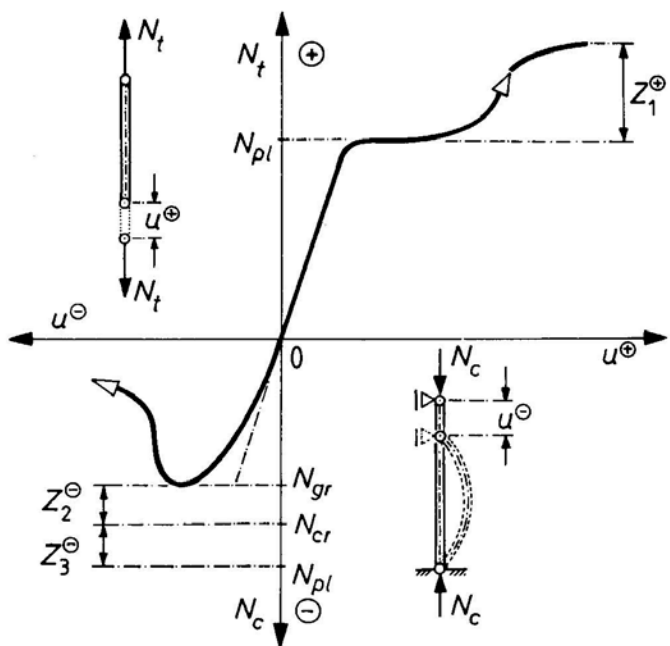
Układy prętowe statycznie niewyznaczalne tracą nośność, tj. zmieniają się w układy geometrycznie zmienne wtedy, kiedy wyczerpana zostanie taka liczba elementów sprawczych, która zabezpieczała ich geometryczną niezmienność.

Nośności graniczne oraz ŚRS takich konstrukcji w istotny sposób zależą od ścieżek równowagi granicznej elementów sprawczych po osiągnięciu przez nie ich nośności granicznych.

Można wyróżnić dwa typy elementów sprawczych wykonanych z materiału sprężysto-plastycznego: zachowujące swą pełną nośność w stanie granicznym mimo dużych kątów obrotów lub wydłużeń oraz tracące nośność po osiągnięciu ich nośności granicznej.

Pierwsze z nich po osiągnięciu ich nośności granicznych charakteryzuje pozioma, drugie zaś opadająca ścieżka równowagi statycznej.

Przykładem odmiennego zachowania się elementu po osiągnięciu nośności granicznej są pręty obciążone siłą podłużną (rys. 5.7), o różnych ścieżkach równowagi przy ściskaniu i rozciąganiu.



Rys. 5.7. ŚRS pręta obciążonego siłą podłużną

Rozciągane pręty ze stali sprężysto-plastycznej po osiągnięciu nośności plastycznej zachowują swą nośność i w tej fazie wyężenia charakteryzowane są poziomą ŚRS.

Elementy ściskane po osiągnięciu nośności granicznej tracą zdolność przenoszenia przyłożonych do nich obciążeń.

W granicznym stanie wyężenia rozciągane lub zginane pręty o przekrojach klasy 1 zachowują swą nośność, tworząc przeguby *czynne*, gdyż są zdolne przenosić dotychczasowe ich wyężenie.

Pręty ściskane oraz pręty, których ściskane ścianki są niestateczne, po uformowaniu się przegubów plastycznych tracą na nośności tworząc przeguby *bierne*.

W zginanych statycznie wyznaczalnych konstrukcjach zbudowanych z prętów krępych klasy 1 powstanie przegubu plastycznego w dowolnym przekroju zmienia je w układy geometrycznie zmienne.

Zysk $(\alpha - 1)$ ze stosowania teorii plastyczności w takiej sytuacji sprowadza się do wykorzystania rezerwy plastycznej jednego przekroju (α - współczynnik rezerwy plastycznej).

W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych zyski ze stosowania teorii plastyczności są większe i wynikają z możliwości wystąpienia zbioru przegubów plastycznych zmieniających ustrój w mechanizm.

Projektując konstrukcję statycznie niewyznaczalną, z warunku jedynie sprężystego wyężenia materiału żąda się, aby nośności przekrojów prętów $M_{el,i}$ w stosunku do ekstremalnych sił wewnętrznych od obciążeń zewnętrznych $M_{max,i}$ i spełniały zależność

$$\frac{M_{max,i}}{M_{el,i}} \leq 1 \quad (1)$$

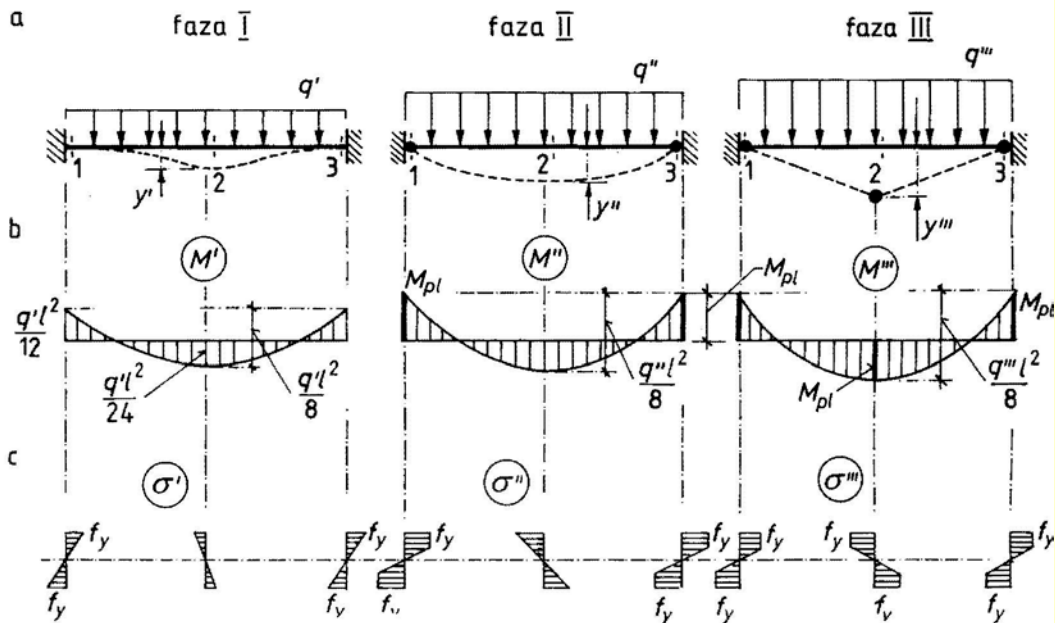
Projektowanie konstrukcji statycznie niewyznaczalnych z uwzględnieniem rezerwy plastycznej przekrojów polega na dopuszczeniu do tworzenia się przegubów plastycznych zginanych przekrojów ustroju, aż do zamiany go w mechanizm.

Dla konstrukcji statycznie niewyznaczalnych rezerwy nośności ustroju wynikają z plastycznej redystrybucji naprężeń w przekrojach oraz plastycznej redystrybucji sił wewnętrznych między przekrojami krytycznymi.

Redystrybucja ta przebiega między przekrojami sprawczymi ustroju, występującymi w minimalnym krytycznym zbiorze (MKZ) elementów sprawczych.

Minimalny krytyczny zbiór (MKZ) to taki, w którym, jeśli choć jeden element jest sprawny, to cały zbiór jest sprawny.

Powyższe zagadnienie analizowane będzie na przykładzie belki obustronnie sztywno zamocowanej na końcach, obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem poprzecznym, pokazanej na rys. 5.8.



Rys. 5.8. Wykresy momentów zginających (b) oraz rozkłady naprężeń w przekrojach (c) belki statycznie niewyznaczalnej (a) w sprężystej i pozasprężystej fazie obciążenia

Przy wzrastającym monotonicznie obciążeniu można wyróżnić trzy fazy wyciężenia belki.

Przedstawione niżej podejście wyróżniania faz tworzenia się przegubów plastycznych jest wygodne w analizach numerycznych szacowania obciążeń granicznych ustroju.

Ponadto w prezentowanej analizie zastosowano uproszczone podejście zakładając, iż przekrojowe siły poprzeczne w belce V nie redukują jej nośności plastycznej na zginanie $M_{pl} = M_{pl,V}$.

W fazie I (sprężystej) ekstremalne wyężenie belki pokazanej na rys. 5.8 powstaje w przekrojach podporowych 1 i 3, a nośność sprężystą konstrukcji mierzoną obciążeniem q' wyznacza się z warunku $\sigma = f_y$ sprężystego rozkładu naprężeń w przekroju (patrz rys. 5.8c), która wynosi

$$\frac{q'l^2}{12} = Wf_y \quad (2)$$

$$q' = \frac{12Wf_y}{l^2} \quad (3)$$

gdzie:

W – sprężysty wskaźnik zginania przekroju pręta,

f_y – granica plastyczności stali,

l – rozpiętość belki,

q' – obciążenie równomiernie rozłożone.

W fazie II, przy wzrastającym obciążeniu belki, przekroje przypodporowe 1 i 3 (gdzie występują ekstremalne momenty zginające) wchodzi w obszar wyężenia pozasprężystego i rozpoczyna się proces redystrybucji uogólnionych sił między przekrojami krytycznymi (tworzą się przeguby plastyczne).

Skutkuje to zwiększeniem przyrostu przemieszczeń belki, co pokazano na rys. 5.8a faza II.

Proces kończy się utworzeniem się przegubów plastycznych w przekrojach 1, 2 i 3, które powodują zmianę ustroju w mechanizm.

Nośność graniczną mierzona obciążeniem poprzecznym q''' wyznacza się jak dla belki statycznie wyznaczalnej, zakładając, że znane są momenty plastyczne w przekrojach krytycznych, w następujący sposób

$$\frac{q'''l^2}{8} = 2M_{pl} = 2W_{pl}f_y \quad (4)$$

$$q''' = \frac{16W_{pl}f_y}{l^2} \quad (5)$$

gdzie W_{pl} jest plastycznym wskaźnikiem zginania przekroju pręta.

W analizowanym przykładzie zginania poprzecznego stosunek nośności plastycznej do nośności sprężystej analizowanej belki, mierzony poprzecznym obciążeniem plastycznym w stosunku do sprężystego obciążenia, wynosi

$$\frac{q'''}{q'} = \frac{16W_{pl}}{12W} = \frac{16}{12}\alpha \quad (6)$$

i składa się z części 16/12, która wyraża zmianę schematu statycznego związaną z redystrybucją sił wewnętrznych i składnika W_{pl} / W opisującego wykorzystanie plastycznej rezerwy nośności przekroju, tj. współczynnika rezerwy plastycznej.

W ustrojach statycznie wyznaczalnych można w obliczeniach jedynie uwzględnić utworzenie się jednego przegubu plastycznego, a współczynnik rezerwy plastycznej wynosi $\alpha = W_{pl} / W$.

W ustrojach statycznie niewyznaczalnych można wykorzystać dodatkowo rezerwy plastyczne wynikające z redystrybucji sił między przekrojami krytycznymi.

Wówczas wzrost nośności plastycznej w stosunku do nośności sprężystej konstrukcji wynika z geometrii (kształtu) przekrojów poprzecznych prętów, co wyraża współczynnik rezerwy plastycznej α , oraz ze schematu statycznego, charakteryzowanego minimalnym zbiorem elementów sprawczych (MKZ) badanego ustroju.

Dla dwuteowego przekroju analizowanej belki pokazanej na rys. 5.8 stosunek nośności plastycznej do nośności sprężystej (przyjęto $\alpha = 1,17$), mierzonej obciążeniem poprzecznym wynosi $q''' / q' = (16 / 12) \times 1,17 = 1,56$.

Przedstawiona analiza pozasprężystego wyężenia belki obustronnie zamocowanej ma charakter uproszczony, gdyż założono, że siły poprzeczne (V) nie zmniejszają nośności przekroju na zginanie.

W ogólnym przypadku, z powodu złożonego stanu wyęźnienia przekroju zginanego (M, N, V) wyznacza się zredukowaną nośność plastyczną na zginanie $M_{pl,N,V}$.

Z badań wynika, iż proces formowania się przegubów plastycznych w ustroju jest zazwyczaj równoczesny, a ścieżki równowagi ustroju są funkcjami nieliniowymi.

W klasycznym sprężystym podejściu do wymiarowania wytrzymałościowego konstrukcji stalowych wyznacza się siły przekrojowe w sprężystym zakresie obciążenia ustroju i sprawdza się stopień wykorzystania nośności przekrojów ekstremalnie wyęźzonych dla sprężystego rozkładu naprężeń.

Osiągnięcie w skrajnych włóknach przekroju krępego klasy 1 i 2 wytrzymałości obliczeniowej materiału nie wyczerpuje nośności elementu.

Aby nastąpiło zniszczenie konstrukcji, musi przekształcić się ona częściowo lub jako całość w łańcuch kinematyczny.

Dlatego też warunek wytrzymałościowy w przypadku uwzględnienia rezerwy plastycznej sprowadza się do wykazania, że pod żadną kombinacją obciążeń obliczeniowych konstrukcja jako całość lub jej część nie może przekształcić się w łańcuch kinematyczny.

Nośność graniczną konstrukcji mierzy się wówczas obciążeniem, które powoduje zamianę jej w mechanizm.

W metodzie nośności granicznej konstrukcji (z wykorzystaniem rezerwy plastycznej przekrojów) przyjmuje się następujące założenia:

- obciążenie, przy którym tworzy się tyle przegubów plastycznych, ile elementów sprawczych (krytycznych) jest w minimalnym

krytycznym zbiorze (MKZ), przyjmuje się jako nośność graniczną ustroju;

- ustrój pozostaje w równowadze, aż do utworzenia się wszystkich przegubów plastycznych w MKZ;

- obciążenia lub ich składowe leżą w głównych środkowych płaszczyznach bezwładności przekroju.

Stosuje się następujące metody obliczeniowe konstrukcji z uwzględnieniem plastycznej rezerwy przekrojów.

Metoda statyczna

polega na znalezieniu dla przyjętych obciążeń obliczeniowych takiego największego pola momentów, przy którym są spełnione warunki równowagi wewnętrznej i nie jest przekroczony w żadnym przekroju krytycznym moment graniczny ($M \leq M_{pl}$).

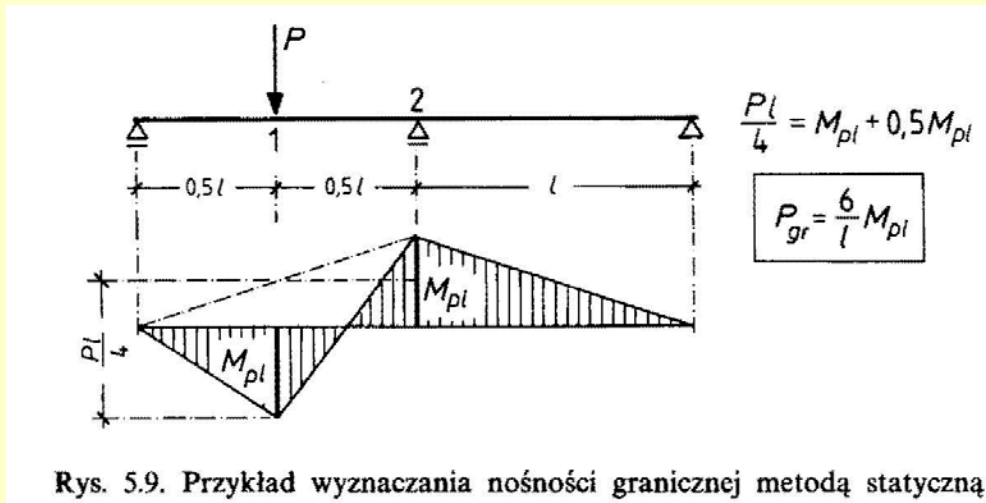
W procedurze obliczeniowej metody statycznej wyznaczania nośności granicznej wyróżnia się następujące fazy:

- ustalenie miejsc i liczby przegubów plastycznych (elementów sprawczych) oraz liczby minimalnych krytycznych zbiorów;
- określenie tyłu równań równowagi, ile jest przegubów plastycznych;
- znalezienie wartości nadliczbowych oraz określenie momentów w funkcji obciążeń obliczeniowych i sztywności prętów.

Metoda ta jest stosowana, gdy jednoznacznie można określić miejsca występowania przegubów plastycznych, a więc dla prostych konstrukcji, o mało skomplikowanych schematach statycznych i schematach obciążeń (o małej liczbie minimalnych krytycznych zbiorów elementów sprawczych).

Na rys. 5.9 pokazano przykład wyznaczenia obciążenia granicznego belki dwuprzęsłowej, obciążonej siłą skupioną P .

Zakładając, iż w stanie granicznym nośności powstaną przeguby nad podporą środkową i pod obciążeniem skupionym, z równania równowagi wyznaczono P_{gr} mierzone nośnością plastyczną przekroju zginanego M_{pl} .



Rys. 5.9. Przykład wyznaczania nośności granicznej metodą statyczną

Metoda kinematyczna polega na badaniu energii rozproszonej w sztywnoplastycznym modelu konstrukcji przy tworzeniu się kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia (KOMZ).

Rozwiązanie uzyskuje się metodą prac przygotowanych, porównując pracę sił wewnętrznych z pracą sił zewnętrznych

$$\sum_i M_{pl} \theta = \sum_j (Py + M\varphi + qu) \quad (7)$$

gdzie:

M_{pl} – moment plastyczny w i -tym przekroju,

θ – kąt obrotu i -tego przekroju uplastycznionego,

P, M, q – obciążenia zewnętrzne w j -tym punkcie,

y, u, φ – przemieszczenia i obroty wywołane obciążeniami zewnętrznymi P, M, q w j -tym punkcie.

W konstrukcji może wystąpić kilka alternatywnych kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia ustroju.

Z otrzymanego zbioru rozwiązań (dla każdego kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia) wybiera się to, które daje najmniejsze obciążenie.

Aby rozwiązać układ statyczny metodą kinematyczną, należy:

- wyznaczyć KDMZ stowarzyszone z założonym obciążeniem systemu;
- ustalić miejsca i ilości przegubów plastycznych (elementów sprawczych) oraz liczbę minimalnych krytycznych zbiorów (MKZ);
- określić kąty obrotów w przegubach plastycznych stowarzyszone z przemieszczeniami prętów w każdym MKZ;
- wyznaczyć obciążenie graniczne z dla każdego mechanizmu (MKZ), a następnie $\min/\min (P, M, q)_{gr}$.

W analizie stanów granicznych ustrojów prętowych należy badać wszystkie potencjalnie kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia konstrukcji.

Aby uniknąć pominięcia ważnego mechanizmu zniszczenia, który dałby najmniejsze obciążenie graniczne, należy systematycznie przeszukiwać MKZ.

Następnie, po uzyskaniu rozwiązania, należy sprawdzić czy stowarzyszone rozkłady sił wewnętrznych spełniają warunki równowagi i warunki plastyczności.

Należy nadmienić, że rozwiązania kinematyczne dają oszacowania nośności od góry.

Metoda kinematyczna pozwala analizować stosunkowo złożone ustroje z pominięciem klasycznej statyki ustrojów.

Staje się jednak mało użyteczna, gdy na uplastycznienie przekroju wpływ ma nie tylko moment M , ale i siła podłużna N oraz poprzeczna V (zachodzi wówczas potrzeba wyznaczenia tych sił w granicznym stanie obciążenia według odrębnych procedur obliczeniowych).

Zarówno w metodzie statycznej, jak i kinematycznej wyznacza się stosunkowo łatwo obciążenie graniczne, przy którym następuje całkowite zniszczenie ustroju.

Brak jednak jest informacji o pośrednich fazach jego wyężenia, tj. przed zamianą konstrukcji w mechanizm.

Metoda "rozwiązań sprężystych" (metoda przyrostowa) polega na kolejnym zmniejszeniu stopnia statycznej niewyznaczalności układu, przez wprowadzanie w miejsce największych momentów kolejnych przegubów plastycznych, aż do uzyskania układu geometrycznie zmiennego.

Tak więc, aby rozwiązać układ statycznie niewyznaczalny należy:

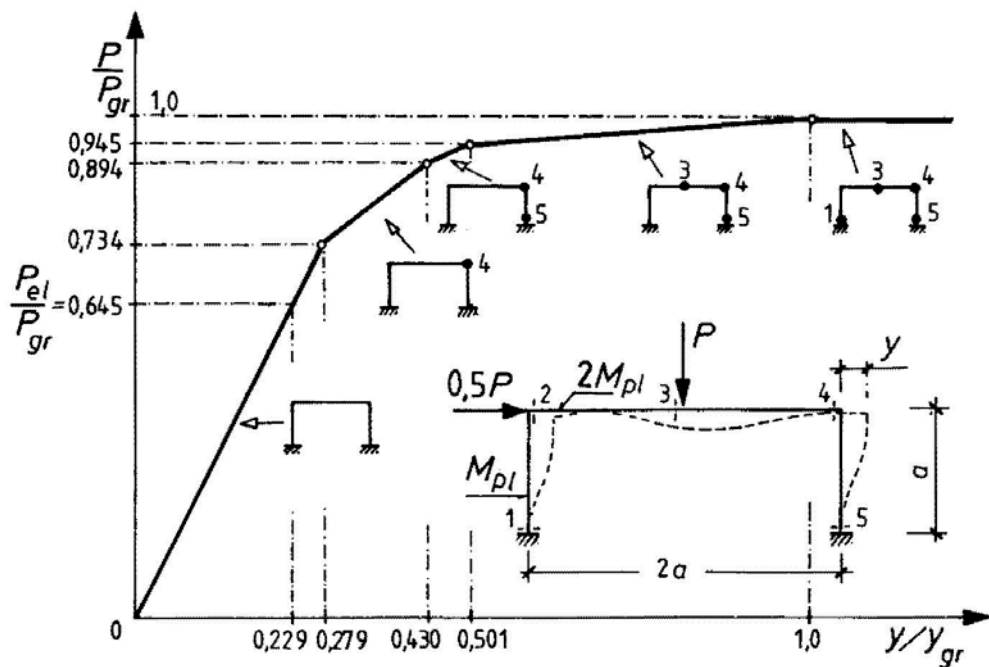
- rozwiązać układ statyczny sprężysty;
- ustalić liczbę ($n+1$) przegubów plastycznych (n stopień statycznej niewyznaczalności) niezbędnych do zmiany konstrukcji w mechanizm;
- wprowadzać kolejno w miejsce największych momentów zginających przeguby plastyczne i rozwiązywać każdorazowo, o jeden stopień statycznej niewyznaczalności niższy układ statyczny, przyjmując w przegubach plastycznych stałe momenty M_{pl} .

W tej metodzie uzyskuje się pełną informację o momentach zginających, siłach przekrojowych poprzecznych oraz osiowych i tworzących się przegubach, a także przemieszczeniach w każdej fazie obliczeń ustroju.

Stanowi to niewątpliwie zaletę tej metody.

Przykład ścieżki równowagi statycznej (odcinkowo zlinearyzowanej) ramy portalowej obciążonej siłą skupioną w środku rygła (o nośności $2M_{pl}$) i przy połączeniu rygła ze słupem (o nośności M_{pl}), wyznaczoną metodą "rozwiązań sprężystych" pokazano na rys. 5.10.

Oznaczając kropkami przeguby plastyczne pokazano kolejne fazy wyężenia ustroju i odpowiadające im schematy statyczne.



Rys. 5.10. Odcinkowo zlinearyzowana ścieżka równowagi statycznej ramy portalowej

Metoda wyrównywania momentów ma zastosowanie do rozwiązywania układów ortogonalnych.

W metodzie tej przyjmuje się jakikolwiek rozkład momentów spełniających warunki równowagi i poszukuje się innego pola, charakteryzującego się niższymi wartościami momentów ekstremalnych, ale zapewniających równowagę.

Procedura obliczeniowa w tej metodzie jest następująca:

- dla wszystkich obciążonych elementów wyznacza się pola momentów, które spełniają równanie równowagi z wyjątkiem równowagi węzłów;
- doprowadza się węzły do równowagi, zaczepiając tam odpowiednie przyrosty momentów;
- wprowadzone przyrosty momentów rozprowadza się w konstrukcji bez naruszania zasad równowagi.

Obliczanie przez programowanie liniowe. Dostępne programy komputerowe statycznej analizy konstrukcji prętowych umożliwiają poszukiwanie obciążenia prowadzącego do zamiany ustroju w mechanizm za pomocą programowania liniowego.

Możliwe jest zatem rozwiązywanie konstrukcji złożonych oraz uwzględnienie łącznego działania w przekroju momentu zginającego, siły podłużnej i siły poprzecznej.