

**Wykłady opracowano na podstawie książek:**

**Antoni Biegus**

**Probabilistyczna analiza konstrukcji**

**PWN 1999**

**Szczepan Woliński, Krystyna Wróbel**

**Niezawodność konstrukcji budowlanych**

**Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej**

**2001**

## 5.6. Modele konstrukcji o równolegle połączonych elementach sprawczych

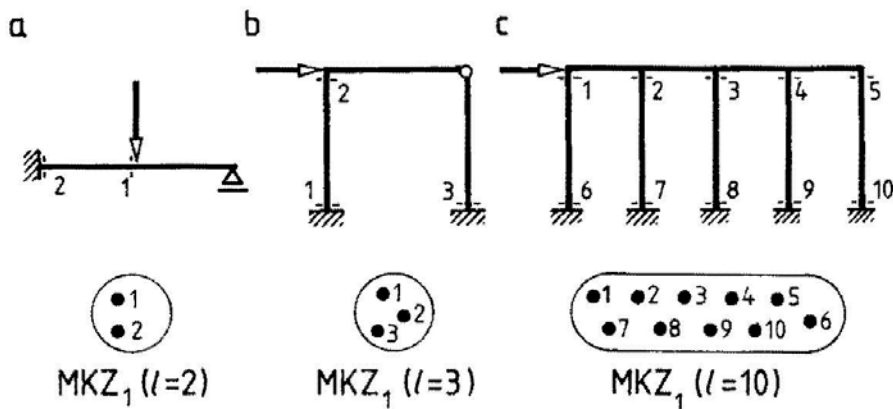
Konstrukcjami złożonymi z elementów połączonych równolegle w ujęciu teorii niezawodności określa się układy, które ulegają awarii wtedy, gdy zniszczone zostaną wszystkie elementy sprawcze systemu.

Ideowy schemat modelu, o równolegle połączonych elementach, to wiązka  $n$  elementów rozciąganych.

Elementy sprawcze po osiągnięciu swej nośności granicznej (np. pełnego uplastycznienia przekroju zginanego) utrzymują swą nośność, umożliwiając redystrybucję sił wewnętrznych w systemie konstrukcyjnym.

W ścieżkach równowagi statycznej takich elementów sprawczych można wyróżnić plastyczną, poziomą fazę ich wyłączenia.

Przykłady konstrukcji złożonych z elementów sprawczych połączonych równoległe z punktu widzenia ich modelu niezawodnościowego pokazano na rys. 5.19.



Rys. 5.19. Przykłady schematów konstrukcji o równoległym modelu niezawodnościowym

Na rys. 5.19a pokazano schemat belki statycznie niewyznaczalnej obciążonej poprzecznie.

W belce tej, aby wystąpiła awaria, musi powstać odpowiednia liczba przegubów plastycznych, które zmieniają konstrukcję w mechanizm.

Elementami sprawczymi są tu uplastycznione dwa zginane przekroje belki.

Liczebność minimalnego krytycznego zbioru belki pokazanej na rys. 5.19a wynosi  $l = 2$ .

Na rys. 5.19b i c pokazano schematy statycznie niewyznaczalnych ram o liczebnościach elementów sprawczych (uplastycznione przekroje prętów) w minimalnych krytycznych zbiorach  $l = 3$  i  $l = 10$ .

Pokazane przykłady prostych systemów konstrukcji prętowych charakteryzują się tym, że liczebności elementów sprawczych rozważanych ustrojów są większe od 1 i że są one połączone równoległe z punktu widzenia teorii niezawodności.

Oznacza to, że do awarii konstrukcji może dojść tylko wtedy, gdy ulegną zniszczeniu wszystkie elementy sprawcze wchodzące w skład MKZ.

**Przykłady konstrukcji pokazane na rys. 5.19 charakteryzują się tym, iż występuje tylko jeden kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia o liczebności większej od 1.**

**Zagadnienie jest o wiele bardziej złożone, gdy występuje wiele nie separujących się mechanizmów zniszczenia.**

Konstrukcje o równoległym modelu niezawodnościowym, dzięki zachowywaniu nośności elementów sprawczych w granicznych stanach ich wyteżeń, można obciążać wzrastającym obciążeniem aż do zmiany ich w mechanizmy.

Dochodzi wówczas do wagowego sumowania się nośności elementów sprawczych.

Dlatego też losowa nośność graniczna konstrukcji  $N(\omega)$ , o elementach sprawczych połączonych równolegle, wynosi

$$N(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i N_i(\omega) \quad (1)$$

gdzie:

$N(\omega)$  – losowa nośność graniczna *i*-tego elementu sprawczego,

$a_i$  – waga *i*-tego elementu sprawczego konstrukcji,

$n$  – liczba elementów sprawczych konstrukcji.

Nośność elementu sprawczego można scharakteryzować za pomocą jej oczekiwanej nośności granicznej  $\bar{N}_i$ , oraz odchylenia standardowego nośności granicznej  $s_{N_i}$ .

Oczekiwaną nośność graniczną  $\bar{N}$  konstrukcji złożonej z elementów sprawczych połączonych równolegle szacuje się ze wzoru

$$\bar{N} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i \quad (2)$$

Odchylenie standardowe nośności granicznej konstrukcji wyznacza się ze wzoru

$$s_N = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 s_{N_i}^2} \quad (3)$$

gdzie  $s_n$  oznacza odchylenie standardowe nośności granicznej  $i$ -tego elementu sprawczego.

Obliczeniową nośność graniczną konstrukcji, o równoległym modelu niezawodnościowym, na założonym poziomie istotności to wyznacza się ze wzoru

$$N_0 = \bar{N} - t_0 s_N \quad (4)$$

Cechą charakterystyczną konstrukcji prętowych o równoległym modelu niezawodnościowym, ważną ze względu na bezpieczeństwo budowli, jest statystyczny efekt zwiększania niezawodności systemu.

Sens fizyczny omawianego zagadnienia polega na "sprzęganiu" się nośności sprężysto-plastycznych elementów sprawczych systemu konstrukcyjnego.

W tym też sensie, **wraz ze wzrostem liczby elementów sprawczych (wchodzących w skład MKZ) połączonych równolegle wzrasta niezawodność ustroju.**



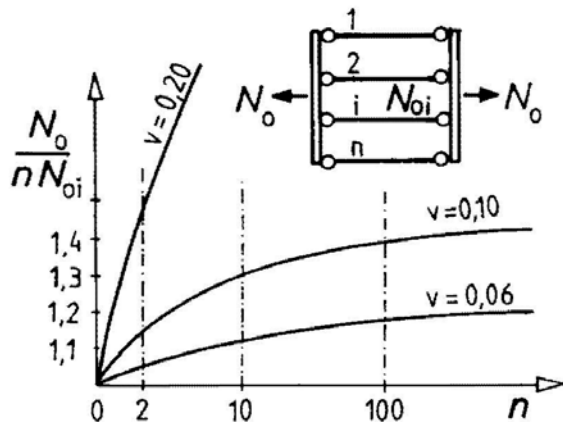
Stosunek obliczeniowej nośności granicznej takiej konstrukcji  $N_0$  do nośności obliczeniowej  $n$  elementów sprawczych  $nN_{0i}$  jest większy od 1 (dla tego samego parametru  $t_0$ ).

Wyraża to zależność

$$\frac{\bar{N} - t_{0s_N}}{n(\bar{N}_i - t_{0s_{N_i}})} > 1 \quad (5)$$

Graficzną ilustrację omawianego zagadnienia statystycznego sprzęgania się nośności elementów sprawczych w konstrukcjach o równoległym modelu niezawodnościowym pokazano na rys. 5.20.

Na osi pionowej podano wskaźnik (5) mierzony stosunkiem nośności konstrukcji  $N_0$  do nośności  $n$  elementów sprawczych  $N_{0i}$ , na osi poziomej zaś liczbę elementów sprawczych  $n$  (w skali logarytmicznej).

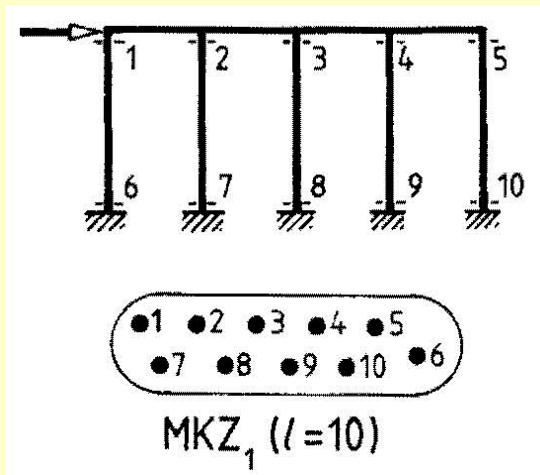


Rys. 5.20. Zmiana parametrów bezpieczeństwa konstrukcji, o równoległym modelu niezawodnościowym, w funkcji liczby jej elementów sprawczych

Podane na rys. 5.20 wykresy obliczono dla współczynników zmienności:  $v = 0,06; 0,10; 0,20$ .

## Przykład 5.2

Dana jest rama, o schemacie statycznym pokazanym na rys. 5.19c.



Jest ona wykonana z I200, o parametrach nośności granicznej przekroju mierzonej momentem zginającym: nośności średniej  $\bar{N} = 81,0$  kNm i odchyleniu standardowym  $s_N = 9,26$  kNm.

Należy oszacować:

- obliczeniową nośność graniczną  $N_{0i}$  elementu sprawczego (pojedynczego przegubu plastycznego) na poziomie istotności  $p(t) = p(3) = 0,99865$ ;
- wartość średnią i odchylenie standardowe nośności granicznej ramy (układu) oraz obliczeniową nośność graniczną konstrukcji  $N_0$  na poziomie istotności  $p(t) = p(3) = 0,99865$ ;
- stosunek nośności granicznej konstrukcji (ramy)  $N_0$  o do nośności  $n$  elementów sprawczych (przegubów plastycznych)  $N_{0i}$ ;
- bezpieczeństwo układu ramowego pod obciążeniem  $P(\omega)h = X(\omega)$ , o parametrach  $\bar{X} = 600$  kNm i  $S_x = 50$  kNm.

Obliczeniowa nośność graniczna elementu sprawczego (pojedynczego przegubu plastycznego) dla  $p(3)$  wynosi

$$N_{0i} = \bar{N} - t_0 s_N = 81,0 - 3 \cdot 9,26 = 53,22 \text{ kNm}$$

Oczekiwana nośność układu ramowego pokazanego na rys. 5.19c, złożonego z 10 elementów sprawczych (przegubów plastycznych), połączonych równolegle, wynosi

$$\bar{N} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = 10 \cdot 1 \cdot 81,0 = 810 \text{ kNm}$$

odchylenie standardowe zaś

$$s_N = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 s_{N_i}^2} = \sqrt{10 \cdot 1^2 \cdot 9,26^2} = 29,28 \text{ kNm}$$

Nośność obliczeniowa badanej ramy dla  $p(t)=p(3)$  wynosi

$$N_0 = \bar{N} - t_{0,s_N} = 810 - 3 \cdot 29,28 = 722,16 \text{ kNm}$$

Stosunek  $N_0 / nN_{0i}$  wynosi

$$\frac{N_0}{nN_{01}} = \frac{722,16}{10 \cdot 53,22} = 1,357$$

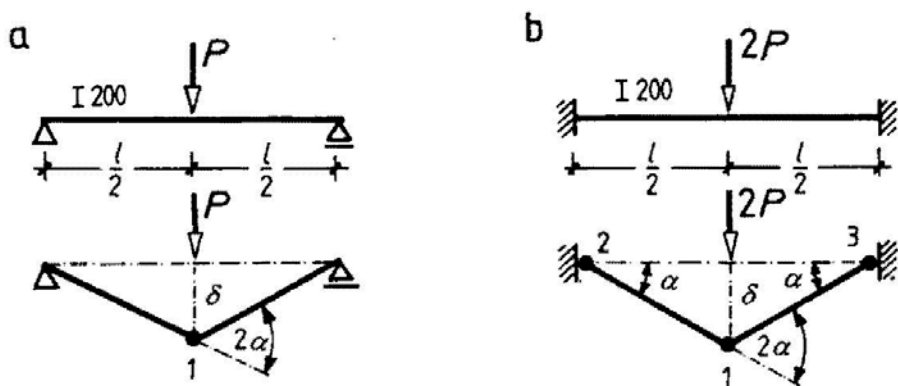
Bezpieczeństwo ramy pod obciążeniem o parametrach  $\bar{X} = 600$  kNm i  $s_x = 50$  kNm wyznacza się określając indeks niezawodności

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{X}}{\sqrt{s_N^2 + s_X^2}} = \frac{810 - 600}{\sqrt{29,29^2 + 50^2}} = 3,62$$

Z tablic rozkładu normalnego dla  $t = 3,62$  odczytano bezpieczeństwo badanego układu, które wynosi  $R(3,62) = 0,999853$ .

### Przykład 5.3

Dane są belki o rozpiętości 4 m, zabezpieczone przed utratą płaskiej postaci zginania (zwichrzeniem), wykonane z I200, o parametrach nośności granicznej zginanego przekroju poprzecznego  $\bar{N} = 81,0 \text{ kNm}$  i  $s_N = 9,26 \text{ kNm}$ .



Rys. 5.21. Schemat belki: a – swobodnie podpartej, b – obustronnie zamocowanej

Należy wyznaczyć:

- obliczeniową nośność graniczną belki swobodnie podpartej (rys. 5.21a), mierzoną siłą przyłożoną w środku rozpiętości, na poziomie istotności  $p(t) = p(3)$ ,
- bezpieczeństwo belki swobodnie podpartej (rys. 5.21a), obciążonej siłą przyłożoną w środku rozpiętości, o parametrach  $\bar{X}_1 = 45,0$  kN,  $s_{X1} = 4,5$  kN,
- nośność graniczną i bezpieczeństwo belki obustronnie zamocowanej, obciążonej poprzecznie w środku rozpiętości obciążeniem skupionym (rys. 5.21 b) o parametrach  $\bar{X}_2 = 90,0$  kN i  $s_{X2} = 9,0$  kN.

Wartość średnią i odchylenie standardowe nośności belki swobodnie podpartej mierzone obciążeniem skupionym ( $P=P_1=N_1$ ,  $M_{pl} = N$ ) przyłożonym w jej środku rozpiętości wyznaczono, analizując mechanizm zniszczenia pokazany na rys. 5.21a



$$P_1 \delta = 2\alpha M_{pl} \quad \alpha = \frac{\delta}{l/2} = \frac{2\delta}{l} \quad P_1 = N_1 = 2 \frac{2}{l} N = \frac{4}{l} N$$

$$\bar{N}_1 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{4}{l} \bar{N} = \frac{4}{4} \cdot 81,0 = 81 \text{ kN}$$

$$s_N = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 s_{N_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{4}\right) \cdot 9,26^2} = 9,26 \text{ kNm}$$

Obliczeniowa nośność graniczna analizowanej swobodnie podpartej belki na poziomie istotności  $p(3)$  wynosi

$$N_{01} = \bar{N}_1 - t s_{N_1} = 81,0 - 3 \cdot 9,26 = 53,22 \text{ kNm}$$

Bezpieczeństwo belki swobodnie podpartej obciążonej losową siłą skupioną  $X_1(\omega)$  oszacowano obliczając indeks niezawodności zapasu nośności

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{X}}{\sqrt{s_N^2 + s_X^2}} = \frac{81 - 45}{\sqrt{9,26^2 + 4,5^2}} = 3,498$$

Z tablic rozkładu normalnego odczytano dla  $p(3,498) = 0,999760$ . Wartość średnią nośności granicznej belki obustronnie zamocowanej, mierzoną obciążeniem skupionym ( $2P = P_2 = N_2$ ,  $M_{pbi} = N$ ) przyłożonym w środku jej rozpiętości (patrz rys. 5.21b), oszacowano z równania stanu granicznego belki (współczynniki liczbowe przy  $N$  są wagami elementów sprawczych)

$$P_2\delta = \alpha M_{pl,2} + 2\alpha M_{pl,1} + \alpha M_{pl,3}$$

$$\bar{N}_2 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{4}{l} (0,5\bar{N} + \bar{N} + 0,5\bar{N}) = \frac{8}{l} \bar{N} = \frac{8}{4} \cdot 81,0 = 162 \text{ kN}$$

$$s_{N_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 s_{N_i}^2} = \frac{4}{l} \sqrt{(0,5 \cdot 9,26)^2 + 9,26^2 + (0,5 \cdot 9,26)^2} = 11,34 \text{ kNm}$$

Obliczeniowa nośność graniczna analizowanej belki obustronnie zamocowanej, na poziomie istotności  $p(3)$ , wynosi

$$N_{02} = \bar{N}_2 - ts_{N_2} = 162 - 3 \cdot 11,34 = 127,98 \text{ kNm}$$

Bezpieczeństwo rozważanej belki obustronnie zamocowanej obciążonej losową siłą skupioną  $X_2(\omega)$  wyznaczono obliczając indeks niezawodności  $t_2$

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{X}}{\sqrt{s_N^2 + s_X^2}} = \frac{162 - 90}{\sqrt{11,34^2 + 9,0^2}} = 4,972$$

Z tablic rozkładu normalnego odczytano dla  $p(4,972) = 0,9999996652$ .

Należy zauważyć, że w analizowanym przykładzie sprężyste obciążenie belek  $X_i$  dobrano tak, że w deterministycznym sensie bezpieczeństwo ich jest sobie równe, gdyż

$$2\bar{X}_1 = \bar{X}_2$$

$$\frac{\bar{X}_2 l}{8} = \frac{\bar{X}_1 l}{4}$$

Wykazano, że bezpieczeństwo belki swobodnie podpartej (o szeregowym modelu niezawodnościowym) wynosi 0,999760 i jest mniejsze od bezpieczeństwa belki obustronnie zamocowanej (o równoległym modelu niezawodnościowym), które wynosi 0,9999996652.

Uwzględniając plastyczną redystrybucję sił wewnętrznych w belce obustronnie zamocowanej jej oczekiwana nośność graniczna jest dwukrotnie większa aniżeli belki swobodnie podpartej

$$\bar{N}_2 / \bar{N}_1 = 2$$

Porównanie obliczeniowej nośności rozważanych belek oszacowanych na poziomie istotności  $p(3)$ , wynosi

$$N_{02} / N_{01} = 127,98 / 53,22 = 2,4047$$

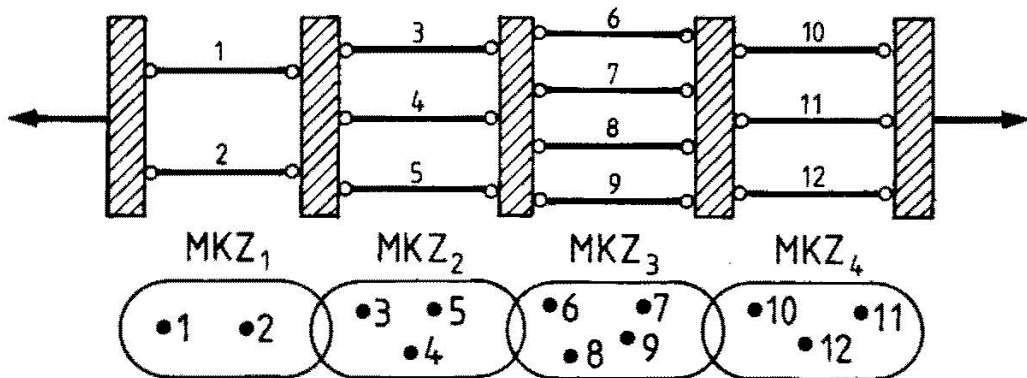
Jest to efekt statycznego wzmocnienia systemu statycznie niewyznaczalnego.

## 5.7. Modele konstrukcji o szeregowo połączonych minimalnych krytycznych zbiorach elementów sprawczych

W rozpatrywanym typie konstrukcji z punktu widzenia teorii niezawodności można wyróżnić zbiory krytycznych elementów sprawczych, które są między sobą połączone szeregowo, natomiast połączenia elementów w zbiorach krytycznych są typu równoległego.

Są to konstrukcje o mieszanym modelu niezawodnościowym.

Ideowy schemat niezawodnościowy takich konstrukcji pokazano na rys. 5.22.



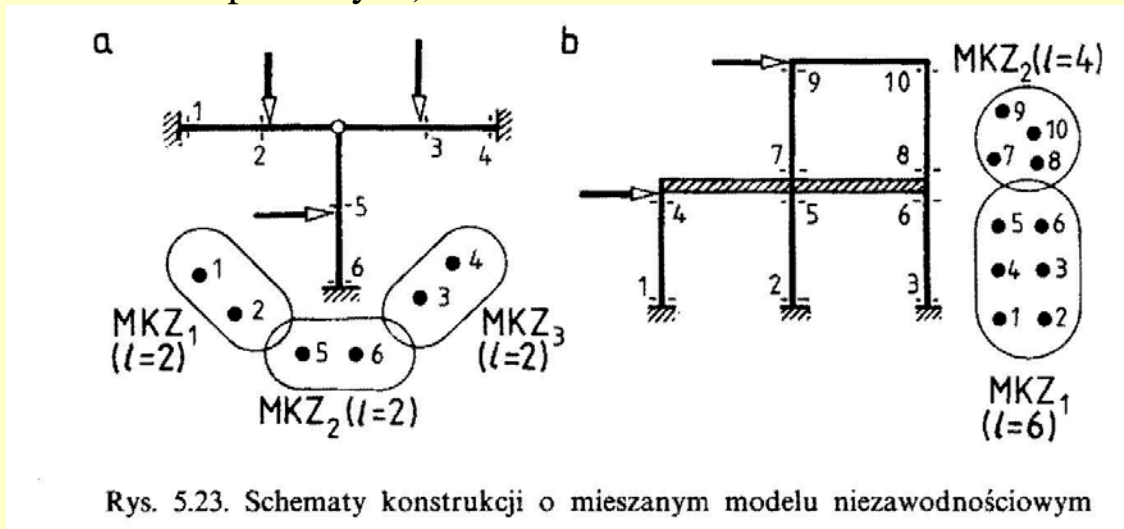
Rys. 5.22. Schemat mieszanego modelu niezawodnościowego konstrukcji

Jest to łączył (układ o modelu szeregowym) o ogniwach w postaci wiązek rozciąganych elementów sprawczych (o równoległym modelu niezawodnościowym).

Układy te mają tę właściwość, że wszystkie elementy sprawcze w danym mechanizmie zniszczenia konstrukcji są połączone równolegle.

W konstrukcji złożonej z elementów sprawczych połączonych równoległe i szeregowo, pokazanej na rys. 5.23a, występują trzy kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia ustroju.

Elementy sprawcze (przeguby plastyczne) jednego MKZ<sub>i</sub> nie wchodzi do innego MKZ<sub>j</sub> (zbiory te są o rozseparowanych elementach sprawczych).



Rys. 5.23. Schematy konstrukcji o mieszanym modelu niezawodnościowym

Liczebności elementów sprawczych minimalnych krytycznych zbiorów wynoszą  $l > 1$ , co pozwala zakwalifikować je jako zbiory o modelach równoległych.

**Jednak MKZ<sub>i</sub> o modelach równoległych są między sobą połączone w sposób szeregowy, gdyż o bezpieczeństwie konstrukcji decyduje najslabszy MKZ<sub>i</sub> tego ustroju.**

Dla konstrukcji ramy (ze sztywną tarczą stropową), pokazanej na rys. 5.23b, można wyróżnić dwa kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia, o liczebnościach elementów sprawczych  $l=4$  i  $l=6$ , połączone między sobą (w MKZ-cie) równolegle.

Minimalne krytyczne zbiory tej konstrukcji są ogniwami szeregowego modelu niezawodnościowego badanego ustroju.



**Losową nośność graniczną omawianego typu konstrukcji wyznacza się jak dla układu szeregowego, uwzględniając specyficzne właściwości wieloelementowych *ogniw* (złożonych z wielu elementów sprawczych połączonych między sobą w sposób równoległy) ze wzoru**

$$N(\omega) = \min_{i=1}^n \left| \sum_j a_{ij} N_{ij}(\omega) \right|$$

gdzie:

$N_{ij}(\omega)$  – losowa nośność graniczna  $j$ -tego elementu sprawczego w  $i$ -tym zbiorze krytycznym ustroju,

$a_{ij}$  – waga  $j$ -tego elementu sprawczego w  $i$ -tym zbiorze krytycznym ustroju,

$i$  – liczba zbiorów krytycznych ustroju,

$j$  – liczba elementów sprawczych w zbiorze krytycznym ustroju.

**Procedura szacowania nośności granicznej i bezpieczeństwa** takich konstrukcji jest następująca.

Należy najpierw wyznaczyć nośności graniczne  $N_i$  i-tych minimalnych krytycznych zbiorów elementów sprawczych, tak jak dla konstrukcji o równoległym modelu niezawodnościowym

$$N_i(\omega) = \left| \sum_j a_{ij} N_{ij}(\omega) \right|$$

oraz bezpieczeństwo częściowe  $p_i$  rozumiane jako prawdopodobieństwo niewystąpienia poszczególnych kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia ustroju.

W etapie drugim obliczeń szacuje się nośność graniczną układu, o szeregowo sprzężonych zbiorach elementów sprawczych, o uprzednio wyznaczonych nośnościach  $N_i$  oraz bezpieczeństwo  $R$  całego układu.

## 5.8. Modele konstrukcji o minimalnych zbiorach krytycznych z elementami wspólnymi

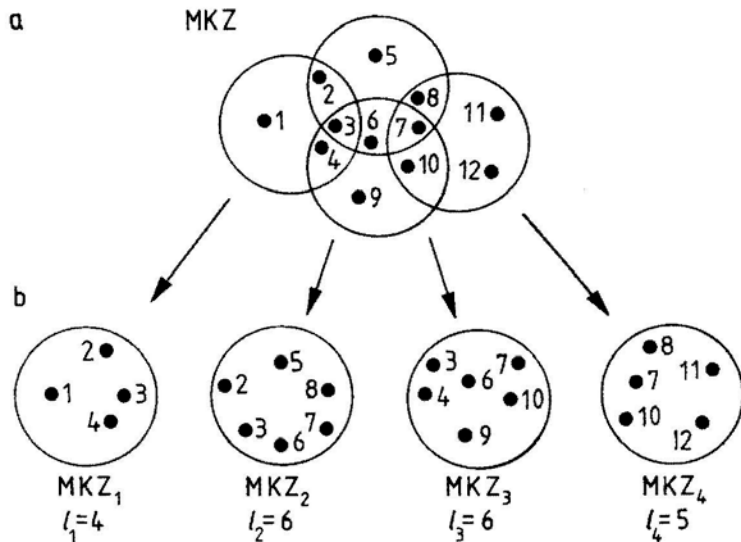
Są to modele gdzie same elementy sprawcze wchodzą w skład więcej niż jednego MKZ-tu.

W ustrojach tych występują minimalne krytyczne zbiory elementów (MKZ<sub>i</sub>), połączone między sobą równolegle.

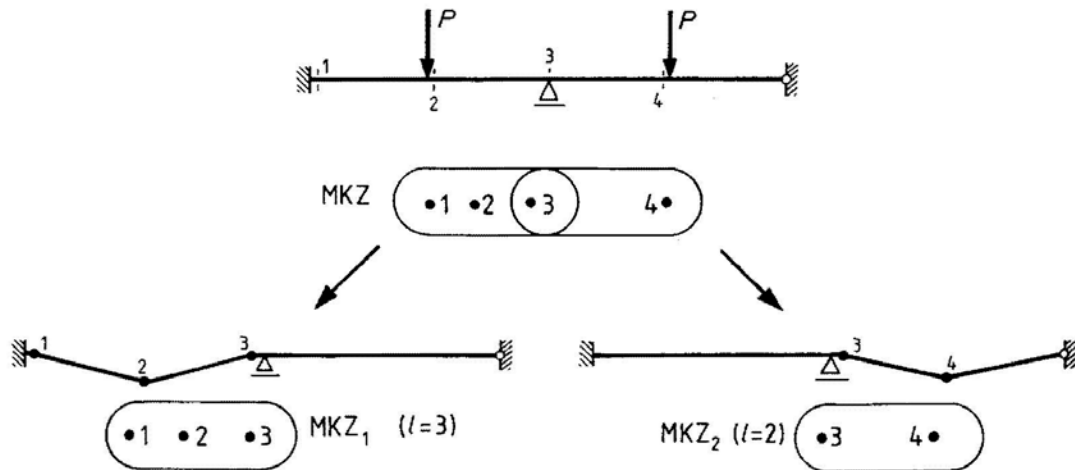
W konstrukcjach złożonych z minimalnych krytycznych zbiorów elementów, połączonych między sobą w sposób wiązany, poszczególne zbiory mają wspólne elementy sprawcze.

Ten typ konstrukcji jest najczęściej spotykany w praktyce inżynierskiej

Schemat ideowy MKZ-tu takich prętowych systemów konstrukcyjnych (o mieszanym modelu niezawodnościowym z elementami wspólnymi) pokazano na rys. 5.25a, przykłady zaś schematów statycznych konstrukcji na rys. 5.26 i rys. 5.27.



Rys. 5.25. Minimalne krytyczne zbiory konstrukcji o mieszanym modelu niezawodnościowym: a – z elementami wspólnymi, b – z elementami rozseparowanymi



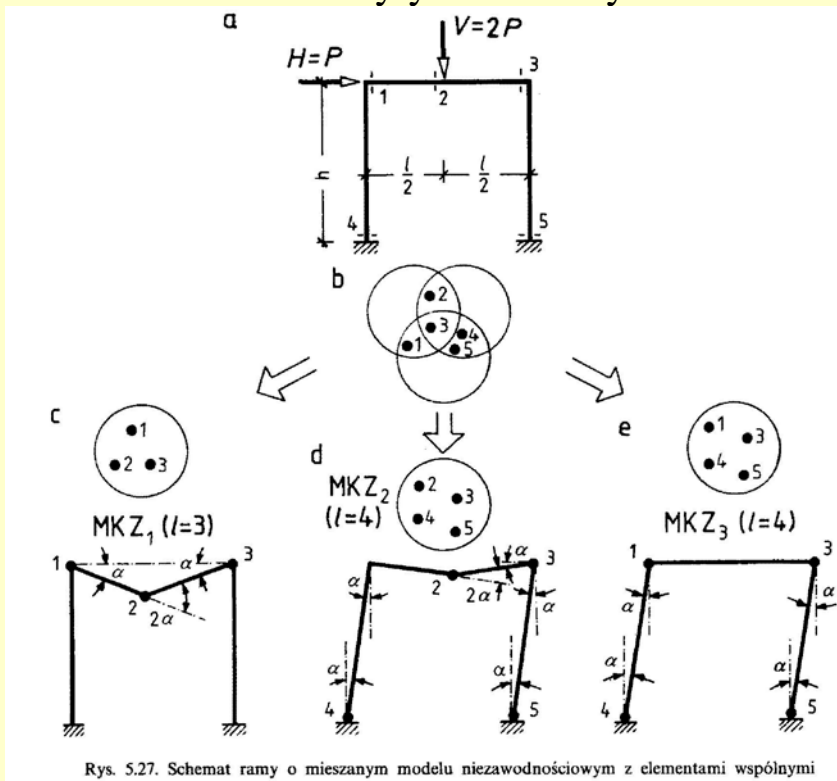
Rys. 5.26. Schemat belki o mieszanym modelu niezawodnościowym z elementem wspólnym

W przypadku belki ciągłej pokazanej na rys. 5.26 wytypowano następujące minimalne krytyczne zbiory elementów sprawczych

- MKZ<sub>1</sub> złożony z elementów sprawczych 1, 2 i 3;
- MKZ<sub>2</sub> złożony z elementów sprawczych 3, 4.

Sprawczym elementem wspólnym analizowanych MKZ<sub>1</sub> i MKZ<sub>2</sub> jest moment plastyczny na podporze środkowej (element 3).

Dla ramy, o schemacie pokazanym na rys. 5.27, należy przeanalizować 3 minimalne krytyczne zbiory:



Elementem wspólnym dla trzech analizowanych MKZ-tów jest element sprawczy 3.

Elementy sprawcze 2 i 3 (przeguby plastyczne) są wspólne dla  $MKZ_1$  i  $MKZ_2$ ; elementy 1 i 3 są wspólne dla  $MKZ_1$  i  $MKZ_3$ ; elementy 3, 4 i 5 są wspólne dla  $MKZ_2$  i  $MKZ_3$ .

Oszacowanie nośności granicznej i bezpieczeństwa konstrukcji, o analizowanym mieszanym modelu niezawodnościowym, tj. w przypadku zbiorów krytycznych z elementami wspólnymi, jest zagadnieniem trudnym, zwłaszcza w miarę wzrostu liczby MKZ-tów i liczby wspólnych elementów sprawczych.

Najprostsze i łatwe oszacowanie od dołu nośności konstrukcji statycznie niewyznaczalnych, o modelu pokazanym na rys. 5.25a, polega na separowaniu minimalnych krytycznych zbiorów o wspólnych elementach sprawczych, w sposób pokazany na rys. 5.25b.

W modelach rozseparowanych na poszczególne minimalne krytyczne zbiory (otrzymuje się  $i$  MKZ-tów), liczba elementów w poszczególnych zbiorach maleje.

Po rozseparowaniu MKZ-tów system konstrukcyjny można traktować jako złożony szeregowo, z minimalnych krytycznych zbiorów (o niezawodnościowym modelu łańcucha). Losowa nośność graniczna takiego układu wynosi

$$N(\omega) = \min_{i=1}^n \left| \sum_j a_{ij} N_{ij}(\omega) \right| = \min_{i=1}^n N_i(\omega)$$

gdzie:

$N_{ij}(\omega)$  – losowa nośność graniczna  $j$ -tego elementu sprawczego w  $i$ -tym zbiorze krytycznym ustroju,

$a_{ij}$  – waga  $j$ -tego elementu sprawczego w  $i$ -tym zbiorze krytycznym ustroju,

$i$  – liczba zbiorów krytycznych ustroju,

$j$  – liczba elementów sprawczych w zbiorze krytycznym ustroju.