

Wykłady opracowano na podstawie książek:

Antoni Biegus

PROBABILISTYCZNA ANALIZA KONSTRUKCJI

PWN 1999

Szczepan Woliński, Krystyna Wróbel

NIEZAWODNOŚĆ KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH

Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej 2001

Marian Gwóźdź, Andrzej Machowski

**WYBRANE BADANIA I OBLICZENIA KONSTRUKCJI
BUDOWLANYCH METODAMI PROBABILISTYCZNYMI**

Wydawnictwo PK, Kraków 2012

c) Model procesu stochastycznego z czasem ciągłym

Modelowanie matematyczne zmienności obciążeń w czasie wymaga w szczególności zastosowania **teorii procesów stochastycznych** $\underline{F}(t)$ z czasem ciągłym.

Dla określonego j -tego obiektu budowlanego, obciążenie jest j -tą realizacją $F_j(t)$ (czyli nielosową funkcją czasu) funkcji losowej $\underline{F}(t)$

Z kolei dla ustalonej chwili czasu $t = \text{const}$ otrzymujemy **przekrój procesu stochastycznego**, będący zmienną losową $\underline{F}(t)$ określoną na odpowiednim zbiorze budowli.

Ważną i często wykorzystywaną cechą procesu stochastycznego jest **stacjonarność**.

Najczęściej rozpatruje się tylko **slabą stacjonarność**, czyli **stacjonarność w szerszym sensie**, polegającą na spełnieniu przez proces trzech warunków:

1) stałej w czasie wartości średniej $\bar{F}(t) = \bar{F} = \text{const}$,

2) stałej w czasie wariancji $\mu_F^2(t) = \mu_F^2 = \text{const}$,

3) momentu korelacyjnego pomiędzy przekrojami procesu $\underline{F}(t)$ i $\underline{F}(t + \Delta t)$ odległymi od siebie o Δt , zależnego tylko od odstępu czasu Δt , lecz nie od chwili czasu t - czyli:

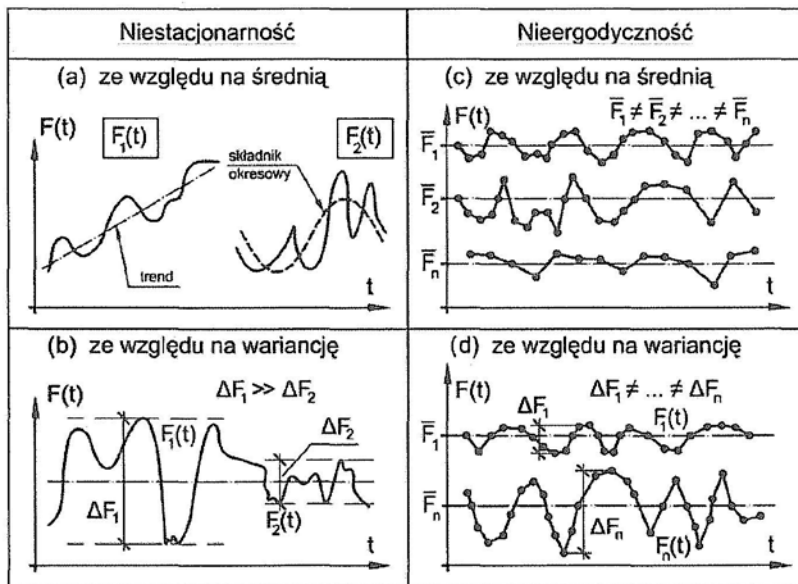
$$\mu_{F(t), F(t+\Delta t)} \equiv \text{cov}\{F(t), F(t + \Delta t)\} \equiv (\mu_F)^2 \rho(\Delta t).$$

Funkcja $\rho(\Delta t)$ nazywa się **unormowaną funkcją autokorelacyjną** procesu $\underline{F}(t)$ i ma interpretację i właściwości współczynnika korelacji.

Stacjonarność w węższym sensie (stacjonarność ścisła) polega na "mocnym" wymaganiu niezależności od wartości t

jednowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa w chwili t i rozkładu dwuwymiarowego w chwilach t i $t + \Delta t$ niezależnego także od t .

Przykłady odchyień od stacjonarności zilustrowano na rys. 4.23 a, b.



Rys. 4.23. Przykłady realizacji $F(t)$ procesów stochastycznych: niestacjonarnych (a), (b); nieergodycznych (c), (d)

Wariant teorii procesów stacjonarnych w szerszym sensie, który nie zajmuje się rozkładami prawdopodobieństwa lecz charakteryzuje proces dwiema stałymi: \bar{F} i μ_F^2 oraz jedną unormowaną funkcją autokorelacyjną $\rho_F(\Delta t)$ nazywa się **teorią korelacyjną**.

Charakterystyką równoważną unormowanej funkcji autokorelacyjnej jest **unormowana gęstość widmowa** $s_F(\omega)$, która jest związana z funkcją $\rho_F(\omega)$ przekształceniem Fouriera:

$$s_F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_F(\Delta t) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\Delta t \quad (1)$$

Funkcja autokorelacyjna $\rho_F(\Delta t)$ wyrażona poprzez gęstość widmową $s(\omega)$ ma postać:

$$\rho_F(\Delta t) = \int_0^{\infty} s_F(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega \quad (2)$$

Unormowana gęstość widmowa $s(\omega)$ opisuje strukturę częstotliwościową procesu stochastycznego $\underline{F}(t)$ jako losowego szeregu Fouriera – przyporządkowując poszczególnym częstotliwościom kołowym $\omega = 2\pi / t_0$ odpowiadające im części wariancji procesu $(\mu_F)^2$.

Symbol t_0 oznacza okres mierzony w jednostkach czasu, czyli długość fali odpowiedniej cosinusoidy.

Podstawą estymacji charakterystyk stacjonarnych procesów stochastycznych (momentów i funkcji rozkładu) są zbiory pomiarów F^* w przekrojach $t = \text{const}$, a także pojedyncze, dostatecznie długie ($T \rightarrow \infty$) realizacje F_j^* ; ($j = \text{const}$).

Przypadek drugi dotyczy tylko tzw. **procesów ergodycznych** ze względu na estymowaną charakterystykę.

W szczególności dla wartości średniej F warunkiem koniecznym ergodyczności jest skończona **skala korelacji**, czyli:

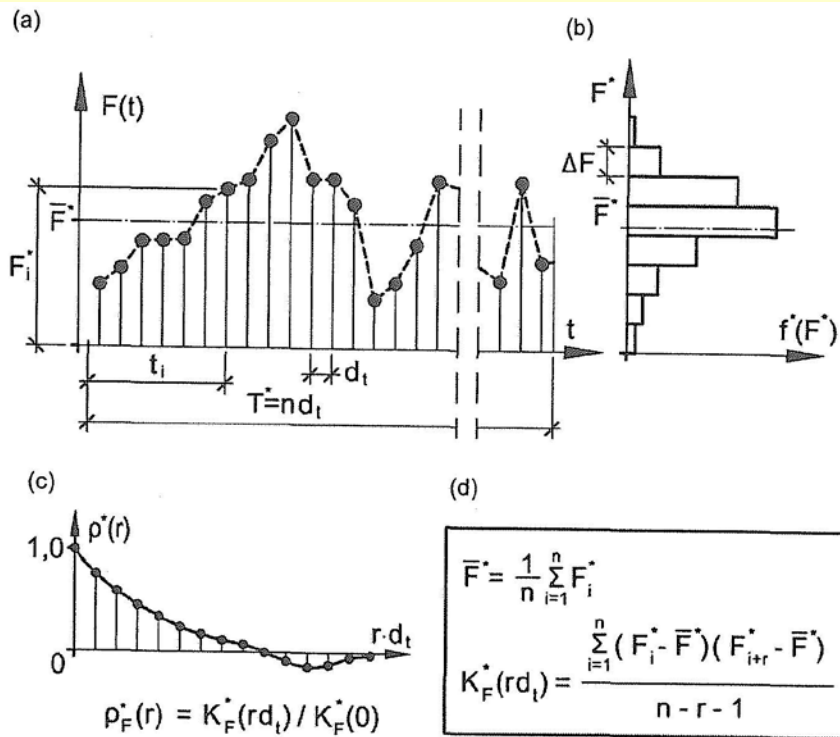
$$\Theta = \int_0^{\infty} \rho(\Delta t) \Delta t < \infty \quad (3)$$

natomiast warunkiem dostatecznym jest skończony **moment bezwzględny**:

$$\eta = \int_0^{\infty} |\Delta t| \rho(\Delta t) \Delta t < \infty \quad (4)$$

Przykłady odchyień od ergodyczności ilustrują zbiory realizacji przedstawione na rys. 4.23 (c) i (d).

Na rys. 4.24 przedstawiono estymację charakterystyk procesu ergodycznego przeprowadzoną na podstawie pomiarów jednej dostatecznie długiej realizacji (a) oraz estymatory: funkcji gęstości (b), unormowanej funkcji autokorelacyjnej (c) oraz momentów (d).

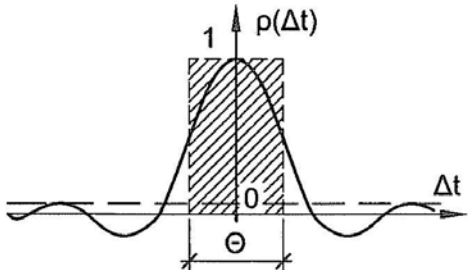
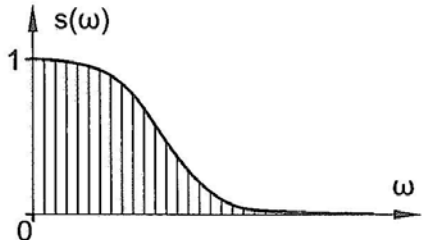


Rys. 4.24. Estymacja charakterystyk na podstawie pomiarów jednej realizacji F_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) ergodycznego procesu stochastycznego $\underline{F}(t)$

Właściwości unormowanej funkcji autokorelacyjnej $\rho(\Delta T)$ i unormowanej gęstości widmowej $s(\omega)$ zestawiono w tabelicy 4.16.

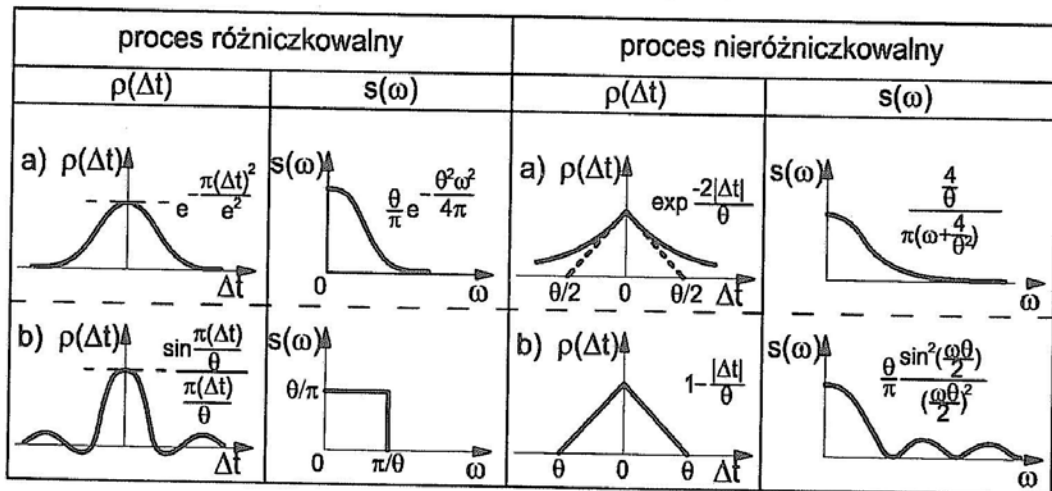
Tablica 4.16

Właściwości unormowanych funkcji: autokorelacyjnej $\rho(\Delta t)$ i gęstości widmowej $s(\omega)$

Funkcja autokorelacyjna unormowana	Gęstość widmowa unormowana
	
<p>1) $\rho(\Delta t) \leq 1$</p> <p>2) $\rho(-\Delta t) = \rho(\Delta t)$</p> <p>3) $\int_0^{\infty} \rho(\Delta t) \cos(\omega \Delta t) d\Delta t \geq 0$</p>	<p>1) $\omega \geq 0$</p> <p>2) $s(\omega) \geq 0$</p> <p>3) $\int_0^{\infty} s(\omega) d\omega = 1$</p>

Podstawą matematyczną **ustalenia wartości charakterystycznej obciążenia** F_k jest rozwiązanie zadania o prawdopodobieństwie q przewyższenia przez dodatni proces obciążenia $\underline{F}(t)$ poziomu F_k , w zakładanym okresie eksploatacji budowli t_{int} .

Zadanie to ma dla procesów stacjonarnych w szerszym sensie proste rozwiązanie tylko wówczas, gdy proces spełnia dodatkowo warunki: normalności i dwukrotnej różniczkowalności funkcji $\rho(\Delta T)$ w punkcie $\Delta T = 0$ - co jest równoważne warunkowi różniczkowalności procesu stochastycznego $\underline{F}(t)$ (por. tablica 4.17).

Przykłady unormowanych funkcji autokorelacyjnych $\rho(\Delta t)$
 i unormowanych gęstości widmowych $s(\omega)$


Proste rozwiązanie omawianego zagadnienia opiera się na założeniu, że **liczba przewyższeń poziomu obciążenia F_k w czasie t** , przy małym prawdopodobieństwie przewyższenia q , **stanowi proces Poissona $\underline{N}(t)$** .

W takim przypadku prawdopodobieństwo co najmniej jednego przewyższenia w czasie t ma postać:

$$q = P(\underline{N}(t) \geq 1) = 1 - \exp(-h_F t) \quad (5)$$

gdzie $h_F [t^{-1}]$ - ryzyko przewyższenia poziomu obciążenia F_k .

Zaproponowane rozwiązanie, które nie wymaga założenia o procesie Poissona ma postać:

$$q = \Phi\left(\frac{F_k - \bar{F}}{\mu_F}\right) \left[1 - \exp\left(\frac{-h_F t}{\Phi\left(\frac{F_k - \bar{F}}{\mu_F}\right)}\right) \right] \quad (6)$$

Ryzyko h_F przewyższenia przez normalny i różniczkowalny proces $F(t)$ (0 średniej \bar{F} i wariancji μ_F^2 poziomu F_k można wyznaczyć ze wzoru Rice'a:

$$h_F = h_0 \exp\left(-\frac{(F_k - \bar{F})^2}{2\mu_F^2}\right) \quad (7)$$

w którym h_0 - to **ryzyko przewyższenia wartości średniej \bar{F}** wg wzoru:

$$h_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{-\ddot{\rho}_F(0)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{I_2} \quad (8)$$

$\ddot{\rho}_F(0)$ - druga pochodna funkcji autokorelacyjnej procesu losowego $F(t)$, w punkcie początkowym $\Delta t = 0$;

$I_2(0)$ - *moment początkowy* 2 stopnia unormowanej gęstości widmowej $s(\omega)$ (por. interpretację wg tablicy 4.16).

Model z czasem ciągłym obciążeń zmiennych konstrukcji budowlanych umożliwia zdefiniowanie *wartości reprezentatywnych* $F_{rep} = \psi_j F_k$ (dla $j = 1, 2$) wprowadzonych do normy europejskiej EC 1990.

Są to obciążenia o zredukowanej wartości charakterystycznej, określanej jako:

- częsta $F_{rep} = \psi_1 F_k$ albo
- prawie stała $F_{rep} = \psi_2 F_k$.

Obciążenia zredukowane $\psi_j F_k$ można przyjmować w obliczeniach stanu granicznego użyteczności w dwóch przypadkach:

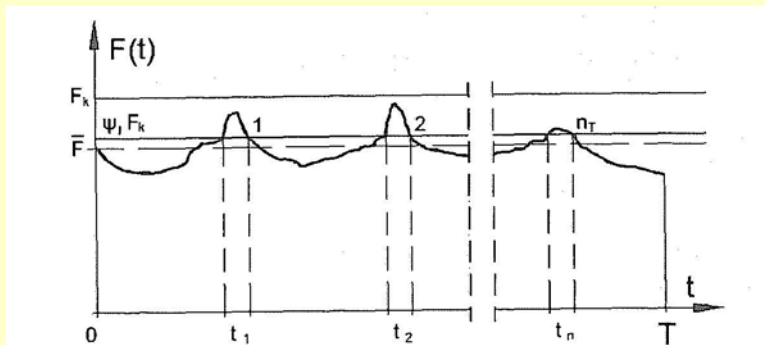
- uszkodzeń miejscowych, np. zarysowania elementu żelbetowego,
- komfortu użytkowego, np. drgań komunikacyjnych budynku.

Wartości obciążeń w obu wymienionych przypadkach są różne.

W przypadku zarysowań konstrukcji miarodajne są maksima lokalne procesu obciążenia, które występują częściej niż obciążenia charakterystyczne F_k .

Obciążenia częste wyznacza się dla założonej liczby n_T (rys. 4.25) przekroczeń poziomu $\psi_1 F_k$ w czasie $T = t_{\text{int}}$ i przy wykorzystaniu formuły (5):

$$h_{F_{\text{rep}}} = \frac{n_T}{T} = h_0 \exp\left(-\frac{(F_k - \bar{F})^2}{2\mu_F^2}\right) = h_0 \exp\left(-\frac{\beta_{F_{\text{rep}}}^2}{2}\right) \quad (9)$$



Rys. 4.25. Realizacja procesu stochastycznego obciążenia z czasem ciągłym

$$\text{stąd } \beta_{F_{rep}} = \sqrt{2 \ln \left(\frac{n_T}{h_0 T} \right)} \quad (10)$$

$$\text{oraz } \psi_1 F_k = \bar{F} + \beta_{F_{rep}} \mu_F \quad (11)$$

Dla przypadku komfortu użytkowania budowli, obciążenia można zredukować bardziej aniżeli dla uszkodzeń miejscowych - **do poziomu obciążeń prawie stałych** $\psi_2 F_k$.

Dopuszcza się przewyższenia poziomu $\psi_2 F_k$, ale pod warunkiem, że sumaryczny czas przekroczeń Σt_i jest mały w stosunku do całego czasu eksploatacji T , por. rys. 4.25.

Czas użytkowania bez przewyższeń można przedstawić w postaci:

$$T_s = T - \Sigma t_i = cT \quad (12)$$

gdzie $c = T_s / T < 1$ - *współczynnik gotowości*, który powinien być wystarczająco wysoki dla zapewnienia funkcjonalności budynku.

Wobec założenia o stacjonarności procesu $\underline{F}(t)$ współczynnik gotowości jest równy prawdopodobieństwu nieprzewyższenia przez obciążenie $\underline{F}(t)$ wartości $\psi_2 F_k$, czyli:

$$c = P(\underline{F}(t) < \psi_2 F_k) = F_F(\psi_2 F_k) \quad (13)$$

Gdy obciążenia mają rozkład normalny, a okres powtarzalności obciążenia charakterystycznego wynosi H , to współczynnik redukcyjny wyznacza się z relacji:

$$\psi_2(\bar{F} + \beta_F \mu_k) = \bar{F} + \beta_c \mu_F \quad (14)$$

gdzie $\beta_F = -\Phi^{-1}(1/H)$ oraz $\beta_c = -\Phi^{-1}(c)$.

Wartości liczbowe współczynników redukcyjnych ψ_1 i ψ_2 wg normy PN-EN 1990, dla różnych kategorii użytkowania powierzchni budynków, zestawiono w kolumnach (3) i (4) w tablicy 4.18.

W kolumnie (2) zamieszczono ponadto wartości liczbowe współczynnika jednoczesności działania obciążeń zmiennych ψ_0 .

Tablica 4.18

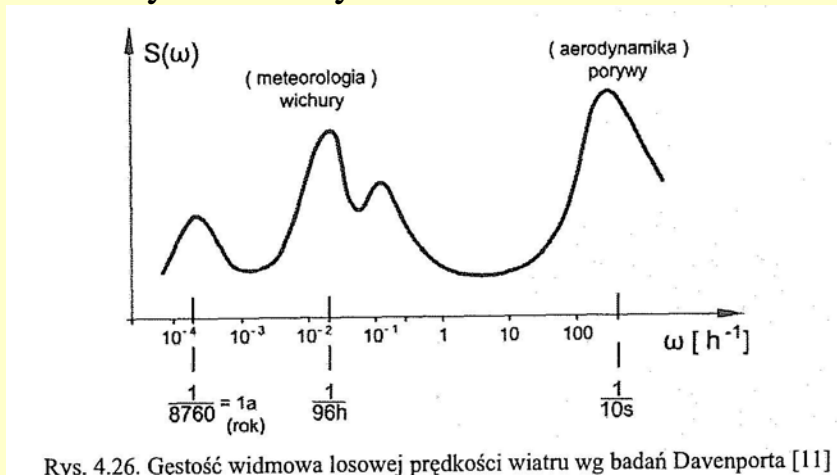
Zalecane wartości współczynników ψ_j dla budynków wg PN-EN 1990

Obciążenia zmienne, kategoria	ψ_0	ψ_1	ψ_2
(1)	(2)	(3)	(4)
Kategoria A: powierzchnie mieszkalne	0,7	0,5	0,3
Kategoria B: powierzchnie biurowe	0,7	0,5	0,3
Kategoria C: miejsca zebrań	0,7	0,7	0,6
Kategoria D: powierzchnie handlowe	0,7	0,7	0,6
Kategoria E: powierzchnie magazynowe	1,0	0,9	0,8
Kategoria F: powierzchnie ruchu pojazdów ≤ 30 kN	0,7	0,7	0,6
Kategoria G: powierzchnie ruchu pojazdów ≤ 160 kN	0,7	0,5	0,3
Obciążenie śniegiem ≤ 1000 m n.p.m.	0,5	0,2	0,2
Obciążenie wiatrem	0,6	0,2	0
Temperatura (nie pożarowa) w budynku	0,6	0,5	0

Innym obszarem zastosowania teorii procesów stochastycznych jest **model losowej prędkości wiatru**.

Można założyć, że jest to proces stacjonarny, ponieważ klimat nie zmienia się w czasie kilkunastu lat.

Ponadto, przyjmuje się założenie procesu gaussowskiego, opisanego typową dla prędkości wiatru gęstością widmową pokazaną schematycznie na rys. 4.26.



Rys. 4.26. Gęstość widmowa losowej prędkości wiatru wg badań Davenporta [11]

Analiza gęstości widmowej prowadzi do wyróżnienia dwóch zakresów częstotliwości: poniżej pasma częstotliwości małej mocy, o wartości co $\omega < 1 \div 10$ [1/h] i powyżej tej wartości.

Proces stochastyczny prędkości wiatru można zatem przedstawić w postaci sumy: $\underline{v}(t) = \underline{v}_{b0}(t) + \underline{v}_p(t)$.

Składnik $\underline{v}_{b0}(t)$ przedstawia zmienność losową odpowiadającą cyklom meteorologicznym, a jego maksima roczne mogą być prognozowane na podstawie dyskretnego modelu losowego sił w równych odstępach czasu.

Składnik $\underline{v}_p(t)$ opisuje porywy, czyli losowe zmiany prędkości wiatru w stosunku do wartości średnich w czasie wichury.

Do opisu porywów wiatru stosuje się model ciągły, zakładając, że w czasie jednej wichury wiatr jest stacjonarnym procesem stochastycznym.

Rozkład prawdopodobieństwa $v_p(t)$ nie ma wpływu na wartości charakterystyczne $v_{b0}(t) = v_k$, jednak porywy wiatru generują zjawiska aerodynamiczne.

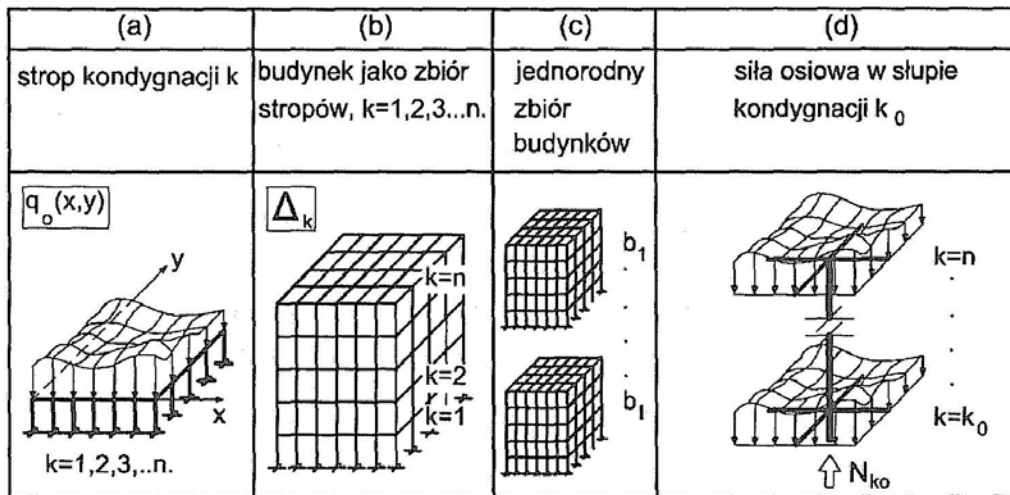
Prędkość porywu opisujemy procesem stochastycznym scentralizowanym, stacjonarnym, normalnym i ergodycznym.

Przy takich założeniach do opisu procesu podaje się zwykle widmo nieunormowane $S(\omega)$ (np. widmo zaproponowane w normie europejskiej PN-EN 1991-1-4).

d) Model złożony ciągłego obciążenia użytkowego na stropach budynku wielokondygnacyjnego

Model ten nawiązuje do koncepcji regularnego ciągu sił losowych wg rys. 4.18, wymaga jedynie zastąpienia wielkości liniowych l i Δl wielkościami powierzchniowymi A i ΔA oraz odpowiednich modyfikacji współczynników wpływu.

Przykład złożonego modelu obciążenia zmiennego losowo w przestrzeni przedstawiono na rys. 4.27.



Rys. 4.27. Charakterystyka kontynualnego modelu obciążenia użytkowego na stropach budynku wielokondygnacyjnego: (a), (b) i (c) oraz schemat obciążenia słupa (d)

Jest to schemat, dla którego intensywność chwilową obciążenia użytkowego na jednostkę powierzchni w punkcie (x, y) płaszczyzny stropu w budynku wielokondygnacyjnym traktuje się jako *dwuwymiarowe pole losowe* $q(x, y)$.

W rozpatrywanym przypadku mamy do czynienia z nieergodyczną funkcją losową, której zbiór realizacji jest "rozwarstwiony" (por. rys. 4.23(c)).

Oznacza to, że w podzbiórach odpowiadających stropom na różnych kondygnacjach budynku i różnym budynkom tego samego typu, wartości średnie losowego obciążenia są istotnie różne.

Estymacji parametrów $q(x, y)$ w zbiorze obiektów nie można zastąpić estymacją dla zbioru punktów (x, y) leżących na jednym, nawet bardzo rozległym stropie.

Zaproponowany przez Cornella odpowiedni model pola losowego obciążeń ma postać sumy:

$$\underline{q}(x, y) = \underline{q}_0(x, y) + \underline{\Delta}_k + \underline{\Delta}_b + \bar{q} \quad (15)$$

Pole losowe $q_0(x, y)$, o wartości średniej równej zero (dwuwymiarowy szum losowy) przedstawiające losowe lokalne wahania obciążenia w stosunku do wartości średniej dla jednego stropu jest w (15) sumowane ze zmiennymi losowymi $\underline{\Delta}_k$ i $\underline{\Delta}_b$ o wartościach średnich równych zero.

Te zmienne losowe przedstawiają wahania wartości średnich pomiędzy kondygnacjami i pomiędzy budynkami tego samego typu - odpowiednio.

Ostatni składnik \bar{q} przedstawia średnią ogólną (nielosową) obciążenia użytkowego na stropach w populacji budynków tego samego typu.

Przyjęcie w (15) wahań wartości średnich w postaci sumy dwóch wzajemnie losowo niezależnych składników $\underline{\Delta}_k$ i $\underline{\Delta}_b$, ma ułatwić gromadzenie danych statystycznych i interpretację wyników.

Z twierdzeń o średniej i wariancji sumy zmiennych losowych, z uwzględnieniem ich rozszerzenia na stacjonarne funkcje losowe, otrzymuje się przy pominięciu składników o wartości zerowej, średnią wariancję pola losowego $\underline{q}(x, y)$:

$$\bar{q}(x, y) = \bar{q} \quad (16)$$

$$\mu^2(x, y) = \mu_0^2 + \mu_k^2 + \mu_b^2 \quad (17)$$

gdzie μ_0^2 , μ_k^2 i μ_b^2 przedstawiają wariancję zmiennych losowych: \bar{q} , $\underline{\Delta}_k$ i $\underline{\Delta}_b$,

Losowy efekt \underline{E} obciążenia $\underline{q}(x, y)$ (uogólnione naprężenie lub przemieszczenie) w konstrukcji budynku, traktowanej jako ustrój liniowy fizycznie i geometrycznie, można otrzymać z zależności:

$$\underline{E} = \int_{A_E} L_E(x, y) \underline{q}(x, y) dx dy \quad (18)$$

gdzie $L_E(x, y)$ - nielosowa *funkcja wpływu*, przedstawiająca zależność wartości efektu E od siły jednostkowej przyłożonej w punkcie (x, y) ,

A_E - obszar wpływu obciążenia $q(x, y)$ na efekt E , dla którego $L_E(x, y) \neq 0$.

W przypadku rygli ram, A_E zawiera się w obszarze jednego stropu, zaś w przypadku słupów obejmuje obszar wszystkich stropów leżących powyżej rozpatrywanej kondygnacji.

Nawiązując do praktycznego uproszczonego sposobu zestawienia obciążeń z zastosowaniem "powierzchni przyporządkowanych", których granice odpowiednio połowią odległości pomiędzy elementami ram, otrzymujemy dla siły osiowej w słupie kondygnacji $k = k_0$ (rys. 4.27(d)) budynku n -kondygnacyjnego, z obciążeniem stropów wg (16) i (18):

$$\underline{N}_{k_0} = (\bar{q} + \underline{\Delta}_b) A_{k_0} + \sum_{k=k_0}^n \underline{\Delta}_k A_k + \sum_{k=k_0}^n \sum_{i=1}^m \int_{A_{ki}} \underline{q}_0(x, y) dx dy \quad (19)$$

gdzie: $A_k = \sum_{i=1}^m A_{ki}$, $A_{k_0} = \sum_{k=k_0}^n A_k$ - odpowiednie dla obliczanego słupa

powierzchnie przyporządkowane A_{ki} z pomieszczeń $i = 1, 2, \dots, m$ na kondygnacji k oraz ich sumy dla k -tej kondygnacji (A_k) - dla wszystkich kondygnacji od k_0 do n (A_{k_0}).

Stosując do (19) wspomniane wcześniej twierdzenia, otrzymujemy (traktując końce słupów jako przeguby) dla średnich wariancji siły osiowej w słupie kondygnacji k_0 :

$$\bar{N}_{k_0} = \bar{q} A_{k_0} \quad \mu_{Nk_0}^2 = \mu_b^2 A_{k_0}^2 + \mu_k^2 \sum_{k=k_0}^n A_k^2 + \mu_0^2 \sum_{k=k_0}^n \sum_{i=1}^m A_{ki}^2 \Gamma^2(A_{ki}) \quad (20)$$

Występująca w (20) funkcja wariancyjna $\Gamma^2(A) = \theta / A$ wyraża się za pomocą skali fluktuacji θ i zmierza do zera gdy $A \rightarrow \infty$.

Jeśli w budynku szkieletowym, każdy słup przenosi obciążenie użytkowe z n stropów o jednakowej powierzchni $A_k = mA_1$ na kondygnacji, to powierzchnia całkowita stropów wynosi $A = mnA_1$.

Oczekiwane obciążenie słupa i wariancja (dla $\Gamma^2(A_{ki}) = 1$) wynoszą odpowiednio:

$$\bar{N} = mn\bar{q}A_1, \quad \mu_N^2 = \mu_b^2 m^2 n^2 A_1^2 + \mu_k^2 m^2 n A_1^2 + \mu_0^2 mn A_1^2 \quad (21)$$

Dla parametrów wg relacji (21), obciążenie charakterystyczne stropu:

$$q_k = \bar{q} + \beta_F \sqrt{\mu_b^2 + \frac{\mu_k^2}{m} + \frac{\mu_0^2}{mn}} \quad (22)$$

maleje wraz z rosnącą liczbą pomieszczeń m i liczbą kondygnacji n .