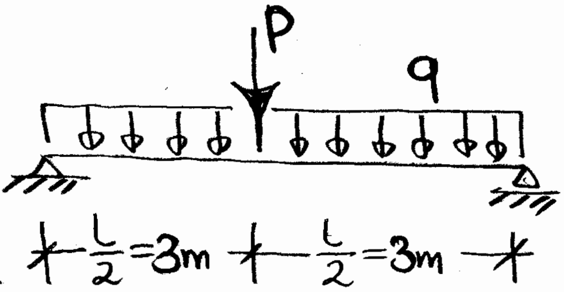
1

* Belka swobodnie podparta wg rys. poddane jest działaniu losowych obciążeń

- ciągłego q o rozkładzie $N(20,1)\ \left[\frac{kN}{m}\right]$
- skupionego P o rozkładzie $N(40,3)\ [kN]$



Granica plastyczności materiału $f_y \equiv f$ jest zmienną losową o rozkładzie $N(300,5)\cdot 10^3\ [kPa]$

Plastyczny wskaźnik wytrzymałości przekroju $W = 600\ cm^3 = 6\cdot 10^{-4} m^3$.

Obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia nośności granicznej belki.
(jedynie wpływ zginania)

Funkcja stanu granicznego

$$G(q,P,f) = fW - \frac{qL^2}{8} - \frac{PL}{4} = 6\cdot 10^{-4} f - 4{,}5q - 1{,}5P \quad [kNm]$$

Jako kombinacja liniowa zmiennych losowych o rozkładzie normalnym jest ona zmienną losową o rozkładzie normalnym.

wartość średnia funkcji G
$$\bar{G} = 6\cdot 10^{-4}\bar{f} - 4{,}5\bar{q} - 1{,}5\bar{P} = 6\cdot 10^{-4}\cdot 3\cdot 10^{5} - 4{,}5\cdot 20 - 1{,}5\cdot 40 = 30\,kNm$$
(jest to sprawdzenie deterministycznego warunku stanu granicznego przy wartościach średnich)

wariancja funkcji G
$$\sigma_G^2 = \left(6\cdot 10^{-4}\sigma_f\right)^2 + \left(4{,}5\sigma_q\right)^2 + \left(1{,}5\sigma_P\right)^2 = \left(6\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^{3}\right)^2 + \left(4{,}5\cdot 1\right)^2 + \left(1{,}5\cdot 3\right)^2 = 49{,}5\ \left[(kNm)^2\right]$$

odchylenie standardowe funkcji G: $\sigma_G = 7{,}036\ kNm$

Prawdopodobieństwo przekroczenia stanu granicznego (prawdopodobieństwo awarii)

$$P_f = P(G<0) = F\left(\frac{0-30}{7{,}036}\right) = F(-4{,}264) = 1 - F(4{,}264) = 1{,}02\cdot 10^{-5}$$

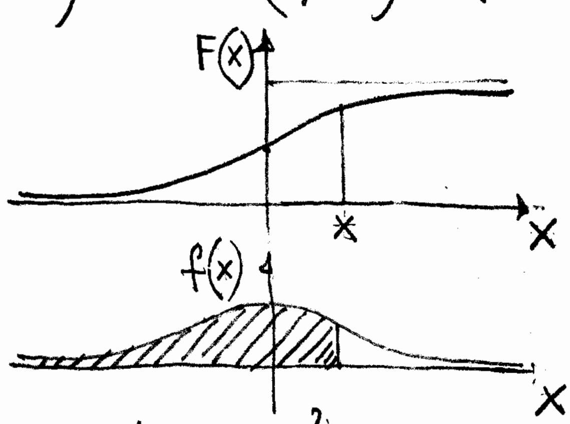
UWAGA: Jeśli funkcja $G(\underset{\sim}{X})$ o rozkładzie normalnym gdzie $\underset{\sim}{X} = \{X_1 \ldots X_n\}$ – wektor zmiennych podstawowych jest funkcją stanu granicznego:

$G(\underset{\sim}{X}) > 0$ → stan bezpieczny
$G(\underset{\sim}{X}) < 0$ → stan awaryjny
$G(\underset{\sim}{X}) = 0$ → stan graniczny

wówczas $\beta = \frac{\bar{G}}{\sigma_G}$ – wskaźnik niezawodności Cornella

wtedy $P(G<0) = F\left(\frac{0-\bar{G}}{\sigma_G}\right) = F(-\beta)$

Jest to ocena niezawodności układu metodą poziomu drugiego.

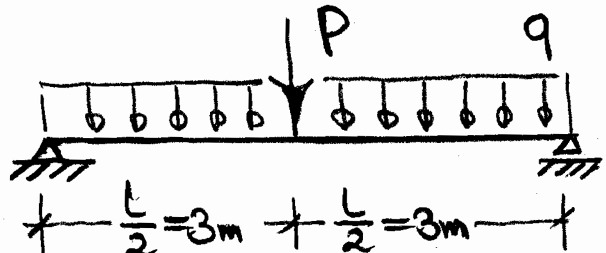


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

2

*



$EI = 20000\ kNm^2 = const$

Na belkę wg rysunku działają losowe obciążenie:
- ciągłe q o rozkładzie $N(20,1)\left[\frac{kN}{m}\right]$
- skupione P o rozkładzie $N(40,3)\,[kN]$

Obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia ugięć dopuszczalnych:

a. $V_{dop} = 2{,}8$ cm b. $V_{dop} = 3{,}0$ cm.

c. ile wynosi ugięcie środka belki V_0, które może zostać przekroczone z prawdopodobieństwem 10% (niezawodność 90%)?

Losowe ugięcie środka belki – zmienna losowa o rozkładzie normalnym

$$V(q,P) = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{PL^3}{48EI} = \frac{q\cdot 5\cdot 6^4}{384\cdot 2\cdot 10^4} + \frac{P\cdot 216}{48\cdot 2\cdot 10^4} = (8{,}4375q + 2{,}25P)\cdot 10^{-4}\,[m]$$

Parametry zmiennej losowej V:

wartość średnia $\overline{V} = 10^{-4}(8{,}4375\overline{q} + 2{,}25\overline{P}) = 10^{-4}(8{,}4375\cdot 20 + 2{,}25\cdot 40) =$
$= 258{,}75\cdot 10^{-4}\,m = 2{,}588\,cm$

wariancja $\sigma_V^2 = 10^{-8}\left[(8{,}4375\cdot 1)^2 + (2{,}25\cdot 3)^2\right] = 116{,}754\cdot 10^{-8}\ m^2$

odchylenie standardowe $\sigma_V = 10{,}805\cdot 10^{-4}\,m = 0{,}108\,cm$

a. $P(V > 2{,}8cm) = 1 - P(V < 2{,}8cm) = 1 - F\left(\frac{2{,}8 - 2{,}588}{0{,}108}\right) = 1 - F(1{,}97) =$
$= 1 - 0{,}9756 = 0{,}0244$

INNA WERSJA:
(funkcja stanu granicznego wytrzymałości)

$$G(P,q) = V_{dop} - \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{PL^3}{48EI}, \quad \overline{G} = 2{,}8 - 2{,}588 = 0{,}212\,cm, \quad \sigma_G = 0{,}108\,cm$$

$P(V > 2{,}8) = P(G < 0) = F\left(\frac{0 - 0{,}212}{0{,}108}\right) = F(-1{,}97) = 0{,}0244$

b. $P(V > 3{,}0cm) = 1 - P(V < 3{,}0cm) = 1 - F\left(\frac{3{,}0 - 2{,}588}{0{,}108}\right) = 1 - F(3{,}818) =$
$= 1 - 0{,}999933 = 6{,}67\cdot 10^{-5}$

c. $P(V > V_0) = 1 - P(V < V_0) = 1 - F\left(\frac{V_0 - 2{,}588}{0{,}108}\right) = 0{,}1$

stąd $F\left(\frac{V_0 - 2{,}588}{0{,}108}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \frac{V_0 - 2{,}588}{0{,}108} = 1{,}28$

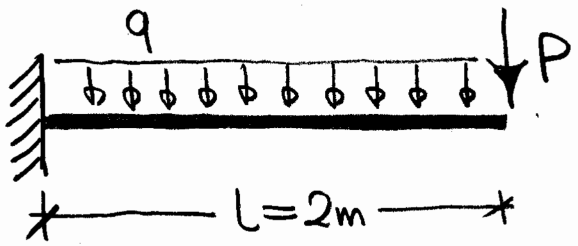
$V_0 = 2{,}588 + 0{,}108\cdot 1{,}28 = 2{,}73\,cm$

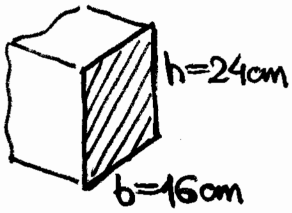
Jest to kwantyl rzędu 0,9 rozkładu zmiennej V – wartość, która z prawdopodobieństwem równym 0,9 nie zostanie przekroczone

inaczej: wartość $F(t) = 0{,}90$ występuje dla $t = 1{,}28 \Rightarrow \frac{V_0 - \overline{V}}{\sigma_V} = t$

stąd $V_0 = \overline{V} + t\cdot\sigma_V = 2{,}588 + 1{,}28 \cdot 0{,}108 = 2{,}73\,cm$

D1 *





$E = 80\,GPa$
$f_y = 55\,MPa$

Na belkę wspornikową o stałym przekroju i stałych cechach materiałowych działają losowe obciążenia:

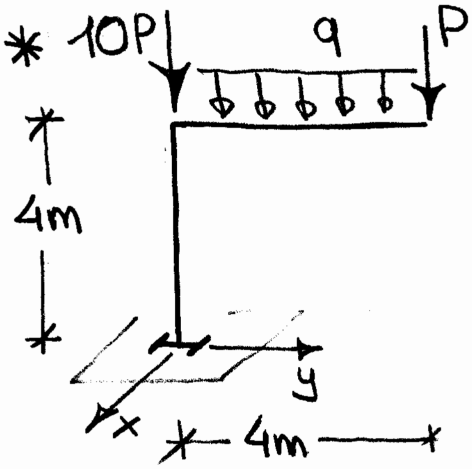
- skupione P o rozkładzie $N(45;\ 2)$ [kN]
- ciągłe q o rozkładzie $N(10,\ 1)$ $\left[\frac{kN}{m}\right]$

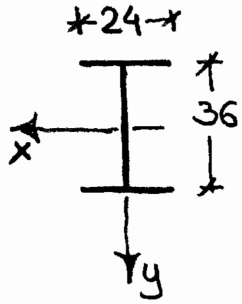
a. obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia stanu granicznego nośności na zginanie.

b. obliczyć prawdopodobieństwo tego, że maksymalne ugięcie belki przekroczy 1 cm.

c. jaka jest wartość ugięcia belki, która z prawdopodobieństwem 0,01 może zostać przekroczona?

D2 *





$t = 1{,}0\,cm$
przekrój cienkościenny

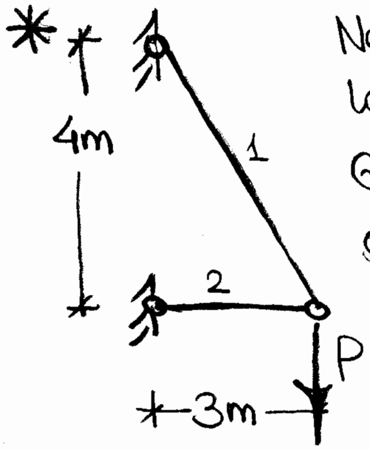
materiał $\rightarrow f_y = 270\,MPa = const$

losowe obciążenia:

$q \rightarrow N(7,\ 1)$ $\left[\frac{kN}{m}\right]$
$P \rightarrow N(40;\ 3)$ [kN]

Obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia nośności granicznej układu uwzględniając interakcję zginania i ściskania, w funkcji stanu granicznego zastosować formułę interakcji idealnego dwuteownika.

*



Na dwuelementowy układ kratowy działa losowe obciążenie P o rozkładzie $N(180,3)$ [kN].
Granica plastyczności materiału prętów f jest zmienną losową o rozkładzie $N(200,5)\cdot 10^3$ [kPa],
losowy przekrój poprzeczny $A \rightarrow$ rozkład $N(16,2)\cdot 10^{-4}$ [m^2]
Obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia stanu granicznego nośności układu, pomijając zagadnienie stateczności pręta ściskanego.

Siły w prętach kratowych : $S_1 = \frac{5}{4}P$; $S_2 = -\frac{3}{4}P$.

Funkcja stanu granicznego : $G(P,f,A) = Af - S_1 = Af - \frac{5}{4}P$

Jest to funkcja nieliniowa, jednak jej prosta iloczynowa postać umożliwia zastosowanie wzorów na wartość średnią i wariancję zmiennych o rozkł. normalnym

wartość średnia $\overline{G} = \overline{A}\,\overline{f} - \frac{5}{4}\overline{P} = 16\cdot 10^{-4}\cdot 200\cdot 10^3 - \frac{5}{4}\cdot 180 = 95$ kN

wariancja $\sigma_G^2 = \overline{A}\sigma_f^2 + \sigma_A^2\sigma_f^2 + \overline{f}\sigma_A^2 + \left(\frac{5}{4}\sigma_P\right)^2 =$

$$= (1{,}6\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^3)^2 + (2\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^3)^2 + (200\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^{-4})^2 + \left(\frac{5}{4}\cdot 3\right)^2 = 1679{,}06 \text{ kN}^2$$

odchylenie standardowe $\sigma_G = 40{,}97$ kN

Prawdopodobieństwo przekroczenia stanu granicznego $P(G<0) = F\left(\frac{0-95}{40{,}97}\right) = F(-2{,}31) = 0{,}0104$

UWAGA: W ogólnym nieliniowym przypadku funkcję G można zlinearyzować (rozwinięcie w szereg Taylora, tylko składnik liniowy) względem wartości średnich

---

wzory : zmienne X i Y o rozkładach normalnych $X(\overline{X}, \sigma_X)$
$Y(\overline{Y}, \sigma_Y)$

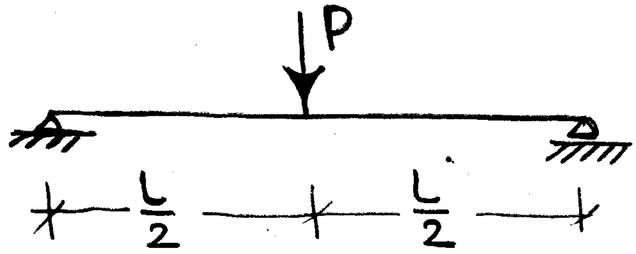
suma $S = X + Y$: $\overline{S} = \overline{X} + \overline{Y}$, $\sigma_S^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ [$Var(S) = Var(X) + Var(Y)$]

różnica $R = X - Y$: $\overline{R} = \overline{X} - \overline{Y}$, $\sigma_R^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ [$Var(R) = Var(X) + Var(Y)$]

iloczyn $P = X\cdot Y$: $\overline{P} = \overline{X}\cdot\overline{Y}$, $\sigma_P^2 = \overline{X}^2\sigma_Y^2 + \sigma_X^2\sigma_Y^2 + \overline{Y}^2\sigma_X^2$

[$Var(P) = \overline{X}^2 Var(Y) + Var(X)\,Var(Y) + \overline{Y}^2 Var(X)$]

*



Belka swobodnie podparta o przekroju prostokątnym poddana jest działaniu siły P. Losowe parametry:

- obciążenie $P \to N(120, 2)$ [kN]
- wymiary przekroju: szerokość $b \to N(12; 0{,}2)\cdot 10^{-2}$ [m], wysokość $h \to N(20; 0{,}5)\cdot 10^{-2}$ [m]
- długość belki $L \to N(8; 0{,}1)$ [m]
- granica plastyczności $f \to N(250, 3)\cdot 10^{3}$ [kPa]
- moduł Younga $E \to N(180, 2)\cdot 10^{6}$ [kPa]

a. obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia stanu granicznego nośności belki

b. obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia dopuszczalnego ugięcia $V_{dop} = 0{,}1$ m

---

a. funkcja stanu granicznego $G(P, b, h, L, f) = f\frac{bh^2}{4} - \frac{PL}{4}$ → nieliniowa

Rozwinięcie liniowe w szereg Taylora względem punktu wartości średnich (*):

$$G \approx G\Big|_* + \frac{\partial G}{\partial f}\Big|_*(f-\bar{f}) + \frac{\partial G}{\partial b}\Big|_*(b-\bar{b}) + \frac{\partial G}{\partial h}\Big|_*(h-\bar{h}) + \frac{\partial G}{\partial P}\Big|_*(P-\bar{P}) + \frac{\partial G}{\partial L}\Big|_*(L-\bar{L})$$

obliczenia: $G\Big|_* = \frac{1}{4}\bar{f}\bar{b}\bar{h}^2 - \frac{1}{4}\bar{P}\bar{L} = \frac{1}{4}(250\cdot 10^3\cdot 0{,}12\cdot 0{,}2^2 - 120\cdot 8) = 60$

$$\frac{\partial G}{\partial f}\Big|_* = \frac{bh^2}{4}\Big|_* = \frac{1}{4}\bar{b}\bar{h}^2 = \frac{1}{4}\cdot 0{,}12\cdot 0{,}2^2 = 1{,}2\cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\partial G}{\partial b}\Big|_* = \frac{fh^2}{4}\Big|_* = \frac{1}{4}\bar{f}\bar{h}^2 = \frac{1}{4}\cdot 250\cdot 10^3\cdot 0{,}2^2 = 2500$$

$$\frac{\partial G}{\partial h}\Big|_* = \frac{fbh}{2}\Big|_* = \frac{1}{2}\bar{f}\bar{b}\bar{h} = \frac{1}{2}\cdot 250\cdot 10^3\cdot 0{,}12\cdot 0{,}2 = 3000$$

$$\frac{\partial G}{\partial P}\Big|_* = -0{,}25 L\Big|_* = -0{,}25\bar{L} = -2 \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial L}\Big|_* = -0{,}25P\Big|_* = -0{,}25\bar{P} = -30$$

stąd $G \approx 60 + 1{,}2\cdot 10^{-3}(f - 250\cdot 10^3) + 2500(b - 0{,}12) + 3000(h - 0{,}2) - 2(P - 120) - 30(L - 8) =$

$= 1{,}2\cdot 10^{-3} f + 2500b + 3000h - 2P - 30L - 660$

Parametry funkcji G: $\bar{G} = G\Big|_* = 60$

$$\sigma_G^2 = (1{,}2\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^3)^2 + (2500\cdot 0{,}002)^2 + (3000\cdot 0{,}005)^2 + (2\cdot 2)^2 + (30\cdot 0{,}1)^2 = 287{,}96$$

$\sigma_G = 16{,}97$ $\quad P_f = P(G<0) = F\left(\frac{0-60}{16{,}97}\right) = F(-3{,}54) = 2\cdot 10^{-4}$

---

b. stan graniczny użytkowalności $G(P, b, h, L, E) = V_{dop} - \frac{PL^3}{48EI} = 0{,}1 - \frac{PL^3}{4Ebh^3}$

obliczenia: $\frac{\partial G}{\partial P}\Big|_* = -\frac{\bar{L}^3}{4\bar{E}\bar{b}\bar{h}^3} = -\frac{8^3}{4\cdot 180\cdot 10^6\cdot 0{,}12\cdot 0{,}2^3} = -7{,}407\cdot 10^{-4}$

$$\frac{\partial G}{\partial L}\Big|_* = -\frac{3\bar{P}\bar{L}^2}{4\bar{E}\bar{b}\bar{h}^3} = -\frac{3\cdot 120\cdot 64}{4\cdot 180\cdot 10^6\cdot 0{,}12\cdot 0{,}2^3} = -0{,}0333 \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial E}\Big|_* = \frac{\bar{P}\bar{L}^3}{4E^2bh^3} = \frac{120\cdot 8^3}{4\cdot 180^2\cdot 10^{12}\cdot 0{,}12\cdot 0{,}2^3} = 4{,}94\cdot 10^{-10}$$

$$\frac{\partial G}{\partial b}\Big|_* = \frac{\bar{P}\bar{L}^3}{4\bar{E}\bar{b}^2\bar{h}^3} = \frac{120\cdot 8^3}{4\cdot 180\cdot 10^6\cdot 0{,}12^2\cdot 0{,}2^3} = 0{,}741 \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial h}\Big|_* = \frac{3\bar{P}\bar{L}^3}{4\bar{E}\bar{b}\bar{h}^4} = \frac{3\cdot 120\cdot 8^3}{4\cdot 180\cdot 10^6\cdot 0{,}12\cdot 0{,}2^4} = 1{,}333$$

$G \approx 0{,}0111 - 7{,}407\cdot 10^{-4}(P - 120) - 0{,}0333(L - 8) + 4{,}94\cdot 10^{-10}(E - 180\cdot 10^6) +$

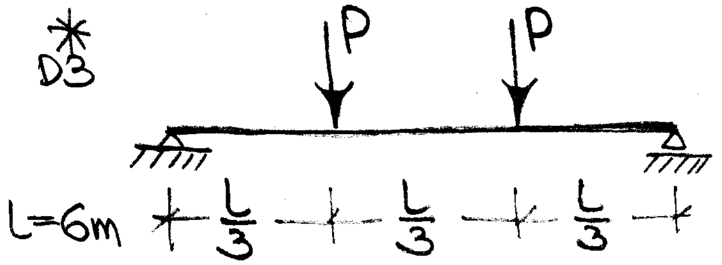
$+ 0{,}741(b - 0{,}12) + 1{,}33(h - 0{,}2) = -7{,}407\cdot 10^{-4}P - 0{,}0333L + 4{,}94\cdot 10^{-10}E + 0{,}741b + 1{,}33h - 0{,}0778$

$\bar{G} = G\Big|_* = 0{,}0111$ $\quad ; \quad \sigma_G^2 = (7{,}407\cdot 10^{-4}\cdot 2)^2 + (0{,}033\cdot 0{,}1)^2 + (4{,}94\cdot 2\cdot 10^{-4})^2 + (0{,}741\cdot 0{,}002)^2 + (1{,}33\cdot 0{,}005)^2 =$

$\sigma_G = 0{,}007777$ $\quad = 6{,}048\cdot 10^{-5}$

$$P_f = P(G<0) = F\left(\frac{0 - 0{,}0111}{0{,}007777}\right) = F(-1{,}43) = 0{,}0764$$

* D3



Belka swobodnie podparta o losowych własnościach materiałowych poddana jest działaniu losowego obciążenia.

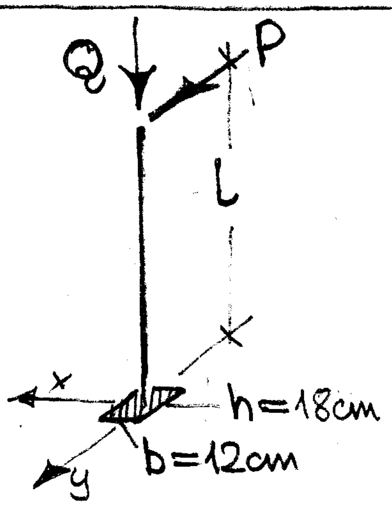
Zmienne podstawowe:

- wymiar (bok) przekroju kwadratowego $a \to N(20; 0{,}2)\cdot 10^{-2}$ [m]
- obciążenie $P \to N(18; 0{,}5)$ [kN]
- granica plastyczności materiału belki $f \to N(30, 3)\cdot 10^{3}$ [kPa]
- moduł sprężystości materiału belki $E \to N(80, 1)\cdot 10^{6}$ [kPa]

a. obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia stanu granicznego nośności belki

b. obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia ugięcia dopuszczalnego $v_{dop}=1{,}5$

* D4



Słup wspornikowy wg rys. poddany jest działaniu kombinacji obciążeń.

Parametry losowe układu (zmienne podstawowe):

$Q \to N(200, 2)$ [kN]

$P \to N(30, 1)$ [kN]

$f \to N(100, 1)\cdot 10^{3}$ [kPa] granica plastyczności

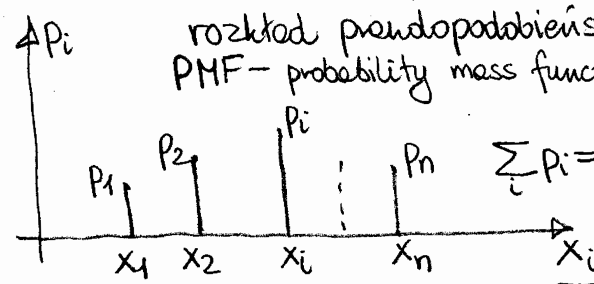
$l \to N(3; 0{,}02)$ [m]

Obliczyć prawdopodobieństwo przekroczenia nośności granicznej układu, uwzględniając interakcję ściskania i zginania.

PRZYPOMNIENIE – **modele probabilistyczne** – zmienne losowe

ZMIENNE LOSOWE DYSKRETNE

rozkład prawdopodobieństwa
PMF – probability mass function

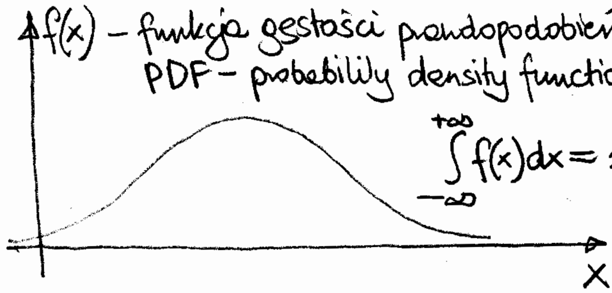


$\sum_i p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p_i = p(x_i)$	p_1	p_2		p_n

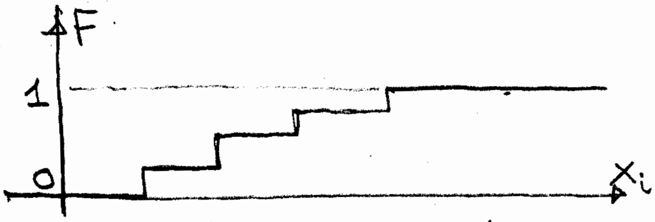
ZMIENNE LOSOWE CIĄGŁE

$f(x)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa
PDF – probability density function

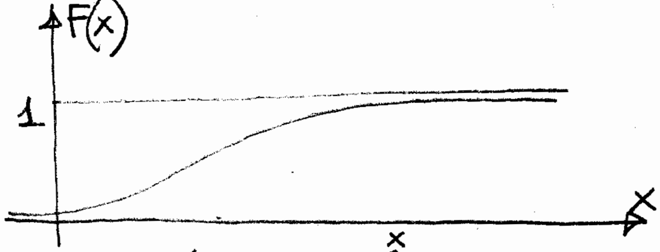


$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Dystrybuanta – w obu przypadkach
CDF – cumulative distribution function



$$F(x) = P(X \leqslant x_i) = \sum_{x_i \leqslant x} P(X = x_i)$$



$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \;;\; f(x) = \frac{dF}{dx}$$

Parametry opisowe – **momenty** zmiennej losowej
Moment rzędu **n** zmiennej losowej względem liczby c

$$M_n(X) = \sum_i (x_i - c)^n p(x_i) \qquad M_n(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-c)^n f(x)\,dx$$

Gdy $c = 0 \longrightarrow$ momenty zwykłe

$$M_n(X) = \sum_i x_i^n p(x_i) \qquad M_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx$$

Wartość oczekiwana (średnia, przeciętna) – moment zwykły rzędu pierwszego zmiennej losowej

$$\overline{X} \equiv E(X) = \sum_i x_i\, p(x_i) \qquad \overline{X} \equiv E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$E(\cdot)$ – operator wartości oczekiwanej (expectation operator)

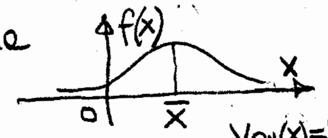
Momenty zmiennej losowej względem wartości średniej ($c = \overline{x}$) – **momenty centralne**

Wariancja – moment centralny rzędu drugiego zmiennej losowej

$$Var(X) = E(X - \overline{X})^2 \equiv \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \overline{x})^2 p_i \qquad Var(X) = E(X - \overline{X})^2 \equiv \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 f(x)\,dx$$

odchylenie standardowe $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$; współczynnik zmienności $\gamma_X = \frac{\sigma_X}{\overline{X}}$

interpretacja – zmienne losowe ciągłe



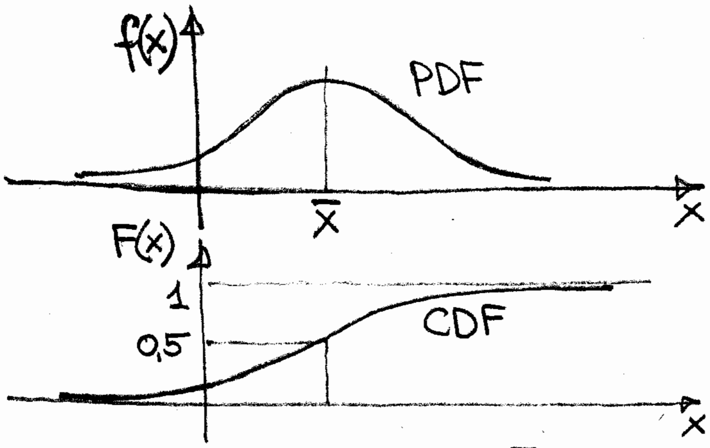
$\overline{X}$ – współrzędna środka ciężkości pola pod wykresem $f(x)$
$E(X^2)$ – moment bezwładności w.w. pola względem osi $x = 0$
$Var(X) = E(X - \overline{X})^2$ – moment bezwładności w.w. pola względem osi $x = \overline{x}$
tożsamość $Var(X) = E(X^2) - \overline{X}^2 \longrightarrow$ odpowiednik prawa Steinera

Moment centralny rzędu trzeciego zmiennej losowej – miara asymetrii jej rozkładu

$$E(X - \overline{X})^3 = \sum_i (x_i - \overline{x})^3 p_i \qquad E(X - \overline{X})^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^3 f(x)\,dx$$

skośność (wsp. skośności) $\Theta = \frac{E(X - \overline{X})^3}{\sigma^3} \rightarrow$ bezwymiarowa. Rozkład symetryczny $\rightarrow \Theta = 0$

ZMIENNA LOSOWA CIĄGŁA – ROZKŁAD NORMALNY (GAUSSA)



dziedzina: $x \in R$

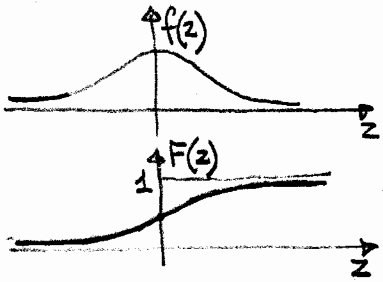
$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

symetryczna względem prostej $x=\bar{x}$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]dt$$

Postać standardowa: $z=\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x} \rightarrow f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]$

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]dt$$

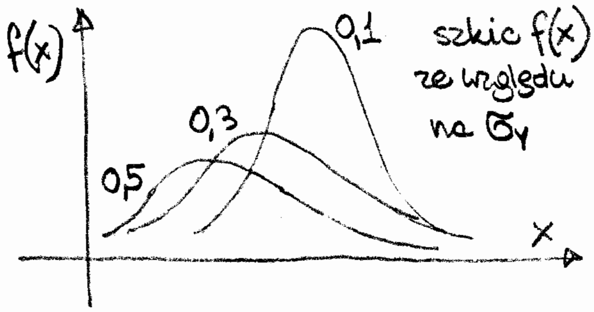


$F(z) \rightarrow$ funkcja nieelementarna, stablicowana: $z \leqslant 0 \Rightarrow F(z) \in (0;0{,}5\rangle$

$z \geqslant 0 \Rightarrow F(z) \in \langle 0{,}5;1)$

ZMIENNA LOSOWA CIĄGŁA – ROZKŁAD LOGARYTMICZNO-NORMALNY (LOGNORMALNY)

– zmienna losowa X taka, że $Y=\ln(X)$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym



$$f(x)=\frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln x-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

wzajemne relacje między $(\bar{x},\sigma_x) \longleftrightarrow (\bar{y},\sigma_y)$

$$\begin{cases} Var(Y)=\sigma_y^2=\ln\left(\frac{\sigma_x^2}{\bar{x}^2}+1\right)=\ln\left(\nu_x^2+1\right) \\ \bar{y}=\ln(\bar{x})-\frac{1}{2}\sigma_y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}=\exp\left(\bar{y}+\frac{1}{2}\sigma_y^2\right) \\ Var(x)=\sigma_x^2=\bar{x}^2\left[\exp(\sigma_y^2)-1\right] \end{cases}$$

* Intensywność pracy kanalizacji burzowej miasta jest zmienną losową o rozkładzie logarytmiczno-normalnym X o parametrach: $\left(\overline{X}=1{,}2;\ \sigma_X=0{,}4\right)\cdot 10^6\ \frac{m^3}{dzień}$. Wydolność systemu wynosi $1{,}5\cdot 10^6\ \frac{m^3}{dzień}$. Jakie jest prawdopodobieństwo zalania?

Obliczenie parametrów odpowiadającego rozkładu normalnego $Y=\ln(X)$

$$\sigma_Y^2=\ln\left(1+\nu_X^2\right)=\ln\left(1+\frac{\sigma_X^2}{\overline{X}^2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{9}\right)=\ln 1{,}111=0{,}105$$

stąd $\sigma_Y=\mathbf{0{,}324}\quad\left[\cdot 10^6\ \frac{m^3}{dzień}\right]$

$$\overline{Y}=\ln(\overline{X})-\frac{1}{2}\sigma_Y^2=\ln 1{,}2-\frac{1}{2}\cdot 0{,}105=\mathbf{0{,}130}\ \left[\cdot 10^6\ \frac{m^3}{dzień}\right]$$

Zmienna Y ma rozkład normalny $N(0{,}130;\ 0{,}324)$, stąd

$$P(X>1{,}50)=1-P(X<1{,}50)=1-P(Y<\ln 1{,}50)=1-F\left(\frac{\ln 1{,}5-0{,}130}{0{,}324}\right)$$
$$=1-0{,}8023=\mathbf{0{,}1977}$$

---

* Czas upływający między kolejnymi trzęsieniami ziemi w danym obszarze charakteryzowany jest rozkładem logarytmiczno-normalnym o wartości oczekiwanej 80 lat i odchyleniu standardowym równym 32 lata (współczynnik zmienności równy 40%).

a. określić parametry odpowiadającego rozkładu normalnego $Y=\ln X$

b. podać prawdopodobieństwo zdarzenia, że trzęsienie ziemi wystąpi w okresie 20 lat od poprzedniego

c. przyjmując, że w ciągu ostatnich 100 lat trzęsienie ziemi nie nastąpiło, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wystąpi ono w roku nadchodzącym?

---

a. $Var(Y)=\sigma_Y^2=\ln\left(\nu_X^2+1\right)=\ln 1{,}16=0{,}1484\ \Rightarrow\ \sigma_Y=\mathbf{0{,}3852}$

$$\overline{Y}=\ln(\overline{X})-\frac{1}{2}\sigma_Y^2=\ln 80-\frac{1}{2}\cdot 0{,}1484=\mathbf{4{,}308}$$

b. $P(X<20)=P(Y<\ln 20)=F\left(\frac{\ln 20-4{,}308}{0{,}3852}\right)=F(-3{,}407)=3{,}14\cdot 10^{-4}$

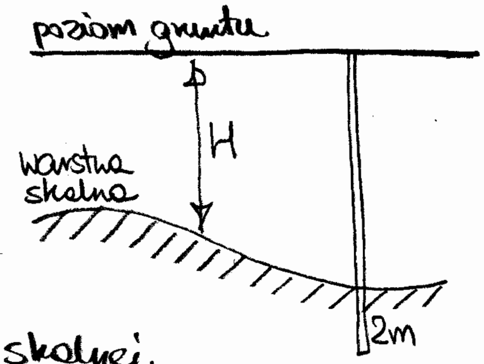
c. prawdopodobieństwo warunkowe $p=\dfrac{P(100<X<101)}{P(X>100)}=\dfrac{P_1}{P_2}$

$$P_1=P(100<X<101)=P(X<101)-P(X<100)=P(Y<\ln 101)-P(Y<\ln 100)=$$
$$=F\left(\frac{\ln 101-4{,}308}{0{,}3852}\right)-F\left(\frac{\ln 100-4{,}308}{0{,}3852}\right)=F(0{,}797)-F(0{,}7714)=$$
$$=0{,}7875-0{,}7799=0{,}0076$$

$$P_2=P(X>100)=1-P(X<100)=1-0{,}7799=0{,}2201$$

stąd $p=\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{0{,}0076}{0{,}2201}=\mathbf{0{,}0345}$

D5 Głębokość warstwy skalnej pod poziomem gruntu jest modelowana rozkładem log-normalnym o wartości średniej równej 20m i odchyleniu standardowym równym 6m. Dla zapewnienia należytego podparcia stalowy pal musi być zagłębiony 2m w warstwie skalnej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że 25m. pal zostanie należycie zakotwiony?



D6 Nośność słupa podporowego wieży transmisyjnej wyraża się rozkładem log-normalnym o wartości średniej 100kN i odchyleniu standardowym 20 kN. Jakie jest prawdopodobieństwo, że słup wytrzyma obciążenie 100 kN? Ile wynosiłoby ono, przy normalnym rozkładzie nośności, o tych samych parametrach? Skomentować odpowiedź.

D7 Maksymalna prędkość wiatru tornada w danym obszarze opisana jest rozkładem log-normalnym o średniej $90 \frac{m}{s}$ i odchyleniu standardowym $18 \frac{m}{s}$.

a. obliczyć prawdopodobieństwo, że podczas kolejnego tornada maksymalna prędkość wiatru przekroczy $120 \frac{m}{s}$.

* b. określić prędkość wiatru, która nie zostanie przekroczona przez 100 lat, zakładając, że w danym obszarze tornado wieje raz do roku.

ZMIENNA LOSOWA DYSKRETNA – ROZKŁAD DWUMIANOWY (BERNOULLIEGO) 11

Próby Bernoulliego – niezależne, powtarzalne w tych samych warunkach, w pojedynczej próbie wyszczególnione zdarzenie o prawdopodobieństwie p oraz przeciwne, o prawdopodobieństwie q (terminologia podręcznikowa: sukces, porażka), we wszystkich próbach p i q są stałe.

Próbami Bernoulliego, w odniesieniu do inżynierii, mogą być:
- statyczne badanie rozciągania stali miękkiej – takie same próbki
- wyznaczanie wytrzymałości na ściskanie kostek betonu o jednakowym składzie,
- szereg elementów konstrukcyjnych, np dwuteowniki wykonywane w hucie, w tej samej linii technologicznej
- grupa identycznie zaprojektowanych konstrukcji (np. typowe hale stalowe)

Prawdopodobieństwo zajścia (k) wyszczególnionych zdarzeń w n próbach Bernoulliego – rozkład dwumianowy (Bernoulliego)

$$P(X) \equiv P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

symbol Newtona

$$E(X) = np \quad , \quad Var(X) = npq$$

W przypadku licznego ciągu prób Bernoulliego (duża liczba n) i małej wartości p, przyjmując $\lambda = np$, prawdopodobieństwo k-krotności wyszczególnionego zdarzenia w n próbach można przybliżyć **rozkładem Poissona**:

$$P(X) = P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Jest to dyskretny rozkład prawdopodobieństwa o ogólnym zastosowaniu, także w zagadnieniach zależnych od czasu (**proces Poissona**)

Przyjmując $\lambda = \nu t$ można zapisać

$$P(X=k, t) = \frac{(\nu t)^k}{k!} e^{-\nu t}$$

Jest to prawdopodobieństwo k-krotności wystąpienia danego zjawiska w czasie t. Wielkość $\nu \left[\frac{1}{s}, \frac{1}{h}\right]$ jest częstością występowania zjawiska [occurrence rate]

* Efektywność produkcji prototypowych złączy konstrukcji drewnianej w zakładzie wytwórczym równa jest 65%.

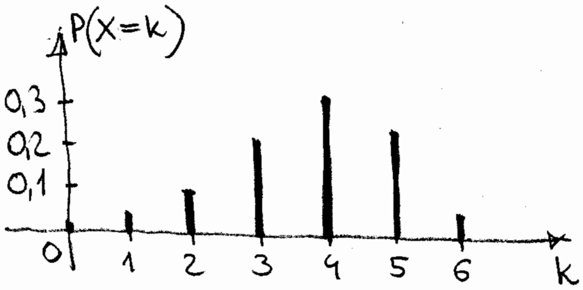
a. niech X będzie liczbą elementów sprawnych w opakowaniu liczącym 6 sztuk. Podać rozkład zmiennej X, jej współczynnik zmienności.

b. podać prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloraz liczb egzemplarzy sprawnych i niesprawnych przekroczy 2.

---

a. $p=0{,}65 \qquad q=0{,}35 \qquad n=6$

$$P(X=0)=\binom{6}{0}\cdot 0{,}65^0\cdot 0{,}35^6=0{,}00184$$
$$P(X=1)=\binom{6}{1}\cdot 0{,}65^1\cdot 0{,}35^5=0{,}02048$$
$$P(X=2)=\binom{6}{2}\cdot 0{,}65^2\cdot 0{,}35^4=0{,}09510$$
$$P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot 0{,}65^3\cdot 0{,}35^3=0{,}23549$$
$$P(X=4)=\binom{6}{4}\cdot 0{,}65^4\cdot 0{,}35^2=0{,}32801$$
$$P(X=5)=\binom{6}{5}\cdot 0{,}65^5\cdot 0{,}35^1=0{,}24366$$
$$P(X=6)=\binom{6}{6}\cdot 0{,}65^6\cdot 0{,}35^0=0{,}07542$$
$$\Sigma = 1{,}0$$



$$\bar{X}=E(X)=np=3{,}9$$
$$Var(X)=npq=1{,}365$$
$$\sigma_X=1{,}1683$$
$$\nu_X=\frac{\sigma_X}{\bar{X}}=0{,}2996$$

b. są to przypadki $k=5$ i $k=6$, A – zdarzenie w treści zadania,

$$P(A)=P(X=5)+P(X=6)=\mathbf{0{,}31908}$$

---

* Wśród wykonanych 600 okiennych elementów konstrukcyjnych 3% nie nadawało się do użytku.

a. jakie jest prawdopodobieństwo 1% awaryjności w partii kolejnych 200 wyrobów?

b. jaki błąd względny zawiera rozwiązanie powyższego problemu z zastosowaniem rozkładów: dwumianowego i Poissona?

$n=200, \quad p=0{,}03$

a. rozkład Bernoulliego: $P_{200}(X=2)=\binom{200}{2}\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}97^{198}=$
$$=199\cdot 100\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}97^{198}=0{,}04304$$

b. rozkład Poissona: $\lambda=np=6$
$$P(X=2)=\frac{6^2}{2!}e^{-6}=0{,}04462$$

błąd względny: $$\eta=\frac{|0{,}04304-0{,}04462|}{0{,}04304}\cdot 100\% = 3{,}6\%$$

D8 W produkcji stalowych elementów konstrukcyjnych 20% egzemplarzy nie spełnia warunku wytrzymałościowego.

a. niech X jest liczbą elementów sprawnych w partii, niezależnie wyprodukowanej, liczącej 5 sztuk. Podać, liczbowo i graficznie, rozkład zmiennej X, obliczyć jej wartość średnią, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności, najbardziej prawdopodobną liczbę sprawnych wyrobów

b. obliczyć prawdopodobieństwo sprawności przynajmniej dwu elementów w partii.

D9 Wykonano 10 identycznie zaprojektowanych obiektów, sprawność systemu wentylacyjnego w każdym z nich wynosi 75%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że system będzie działać

a. w co drugim obiekcie c. co najmniej w trzech obiektach?

D10 Laboratorium bada wytrzymałość próbek walcowych betonu na ściskanie. Z dotychczas zbadanych 250 próbek 75 nie spełniało warunku $R_c > 30$ MPa.

Jakie jest prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

a. w partii kolejnych 20 próbek co najwyżej 90% spełni w.w. warunek

b. w partii kolejnych 20 próbek wszystkie spełnią w.w. warunek

---

D11 Dzienny rozkład temperatur w lipcu na Wybrzeżu Gdańskim opisany jest rozkładem równomiernym w przedziale (15,35)[°C].

a. podać funkcję i narysować wykresy PDF i CDF temperatury

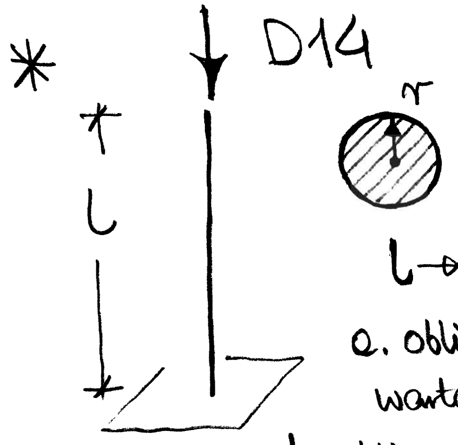
b. jak prawdopodobne jest, że temperatura lipcowa nie przekroczy: 20, 30, 35 [°C]?

c. obliczyć temperaturę lipcową, która z prawdopodobieństwem równym 70% nie zostanie przekroczona.

D12 Dobowa przepustowość w danym punkcie drogi opisana jest rozkładem N(1000; 120). Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu kolejnego tygodnia jedynie w ciągu dwóch dni przepustowość nie przekroczy 900 pojazdów?

D13 W zbiorowości 80 wież transmisyjnych, jednakowo zaprojektowanych, dopuszczalne odchyłki przekroczone są w czterech przypadkach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnych 150 realizacjach odstępstwo od pierwotnej geometrii pojawią się trzykrotnie?

* D14



Pręt wspornikowy o przekroju kołowym poddany jest działaniu siły idealnie osiowej.
Parametry losowe (zmienne podstawowe):

$$l \to N(4;0{,}04)\,[m]\ ;\ E \to N(200,2)\,[GPa]\ ;\ r \to N(6;0{,}08)\,[cm]$$

a. obliczyć parametry losowej siły krytycznej N_{cr}: wartość średnią $\overline{N}_{cr}$ i odchylenie standardowe $\sigma_{N_{cr}}$

b. obliczyć wartość N_x, której nie przekroczy siła krytyczna z prawdopodobieństwem równym 10%. Jakiego poziomu jest to kwantyl?

c. przyjmując, że nośność pręta jest jego siłą krytyczną ($R \equiv N_{cr}$) obliczyć prawdopodobieństwo jej przekroczenia przez siłę $P \to N(280,10)\,[kN]$. Ile wynosi wskaźnik niezawodności?

d. podać średnią wartość $\overline{Q}$ losowej siły Q, o odchyleniu standardowym $\sigma_Q = \sigma_P$, przy której nośność pręta zostanie przekroczona z prawdopodobieństwem równym 4%

Mając daną dowolną (nieliniową) funkcję $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ zmiennych podstawowych $\underset{\sim}{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ (wektor losowy), można rozwinąć ją w przybliżony sposób w szereg Taylora względem wartości średnich $\underset{\sim}{\overline{X}} = \{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n\}$ biorąc jedynie składniki liniowe (linearyzacja): $T \approx \overline{T} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial X_i}(X_i - \overline{X}_i)$

Wartość średnia $\overline{T}$ i odchylenie standardowe σ_T funkcji losowej T mogą być zatem przybliżone wzorami:

$$\overline{T} = T(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n) = \overline{T}(\underset{\sim}{\overline{X}})\ ;\ \sigma_T^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial X_1}\Big|_{\underset{\sim}{\overline{X}}} \sigma_{X_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial T}{\partial X_n}\Big|_{\underset{\sim}{\overline{X}}} \sigma_n^2\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial X_i}\Big|_{\underset{\sim}{\overline{X}}} \cdot \sigma_i\right)^2$$

przypadek rozpatrywany: $N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l_w^2} = \frac{\pi^3 E r^4}{16 l^2}$ $\quad \left(l_w = 2l,\ I = \frac{\pi r^4}{4}\right)$

$\underset{\sim}{X} = \{X_1, X_2, X_3\} = \{E, r, l\}$

a. $\overline{N}_{cr} = N_{cr}(\underset{\sim}{\overline{X}}) = \frac{\pi^3 \overline{E}\,\overline{r}^4}{16 \overline{l}^2} =$ pochodne cząstkowe – współczynniki wrażliwości (funkcji N_{cr} na zmienne E, r i l)

$$\frac{\partial N_{cr}}{\partial E}\Big|_{\underset{\sim}{\overline{X}}} = \frac{\pi^3 \overline{r}^4}{16 \overline{l}^2} = \ldots\ ;\ \frac{\partial N_{cr}}{\partial r} = \frac{\pi^3 \overline{E}\,\overline{r}^3}{4 \overline{l}^2} = \ldots,\ \frac{\partial N_{cr}}{\partial l} = -\frac{\pi^3 \overline{E}\,\overline{r}^4}{8 \overline{l}^3} = \ldots$$

Spostrzeżenie: funkcja N_{cr} zawiera stały mnożnik (równy π^3) – jest on obecny w wartości średniej, wszystkich pochodnych cząstkowych oraz odchyleniu standardowym $\sigma_{N_{cr}}$ → obliczając pochodne cząstkowe mnożnik ten można wyłączyć, bez włączenia w obliczenia

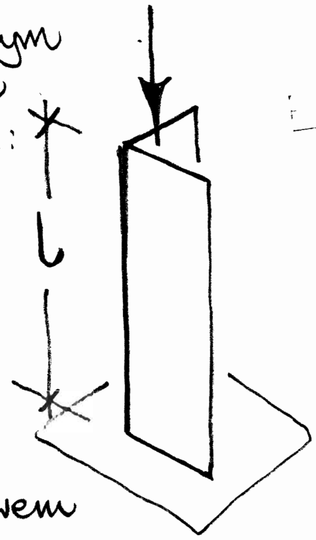
b. kwantyl rzędu 0,1 → na poziomie równym $F^{-1}(0{,}1)$; tutaj poziom $t = 1{,}28$

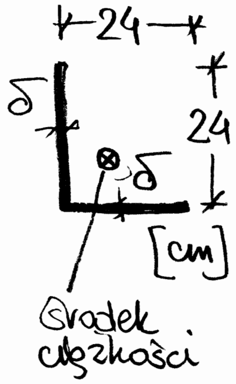
c. można zdefiniować funkcję stanu granicznego

d. także można zdefiniować, zaktualizowaną, funkcję stanu granicznego

D 15 Pręt wspornikowy o przekroju kątowym poddany jest działaniu siły idealnie osiowo ściskającej. Parametry losowe:

$l \to N(3; 0{,}02)$ [m]
$E \to N(180, 2)$ [GPa]
$\delta \to N(1; 0{,}03)$ [cm]

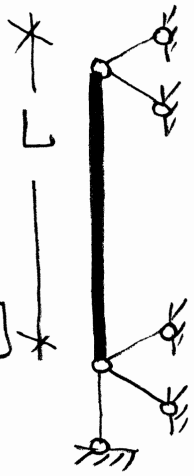


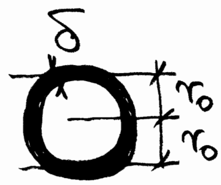


a. obliczyć wartość średnią i odchylenie standardowe losowej siły krytycznej
b. obliczyć wartość, której z prawdopodobieństwem równym 4% nie przekroczy siła krytyczna.
c. określić odchylenie standardowe σ_P losowej siły P o wartości średniej $\overline{P} = 500$ kN tak, aby prawdopodobieństwo awarii wynosiło 10^{-3}.

D 16 Obustronnie przegubowo podparty pręt o przekroju rurowym obciążony jest siłą ściskającą osiową.

Zmienne losowe: $r_0 \to N(10; 0{,}06)$ [cm]
$\delta \to N(0{,}8; 0{,}006)$ [cm]
$L \to N(4; 0)$ [m]





E=200 GPa

a. obliczyć parametry losowej siły krytycznej
b. obliczyć wartość, która przez siłę krytyczną nie zostanie przekroczona na poziomie tolerancji $t = 3$. Jaka jest niezawodność?
c. obliczyć wartość średnią siły P, przy której nośność będzie zachowana z prawdopodobieństwem równym 99,8%? Założyć, że siła krytyczna i obciążenie P mają jednakowe wariancje.

NIEZAWODNOŚĆ SYSTEMÓW – UKŁADÓW

Rozpatrujemy układ złożony z tzw. elementów sprawczych – każdy z nich ma swój udział w pracy układu, tym samym poprawna praca układu (jej prawdopodobieństwo – niezawodność) to poprawna praca pewnej grupy – kombinacji elementów sprawczych, zaś awaria układu to awaria pewnej kombinacji elementów sprawczych.
Zasadniczą rolę w ocenie niezawodności układu elementów odgrywa ich wzajemne połączenie.
UWAGA. Element sprawczy może być rzeczywistym elementem układu (prętem kratownicy, przekrojem krytycznym przy zginaniu w ukł. ramowym) może też mieć sens ogólny, jako „postać zniszczenia".

* POŁĄCZENIA SZEREGOWE ELEMENTÓW

przykład: kratownica statycznie wyznaczalna – przy założeniu jej geometrycznej niezmienności (niedopuszczeniu mechanizmu) każdy jej pręt jest elementem sprawczym, zniszczenie jednego z nich powoduje zniszczenie całości. układ ramowy statycznie wyznaczalny, postacią zniszczenia jest przegub plastyczny w punkcie – elementami sprawczymi są przekroje krytyczne, awaria jednego z nich jest awarią układu

Niezawodność systemu szeregowego = prawdopodobieństwo JEDNOCZESNEGO funkcjonowania wszystkich elementów.

n niezależnych elementów, element „i", jego niezawodność to R_i $\Rightarrow$ niezawodność układu $R=\prod_{i=1}^{n} R_i$

jeśli $R_i=\text{const}$, $R=(R_i)^n$

Podejście równoważne: awaria układu szeregowego to awaria choć jednego elementu, prawdopodobieństwo awarii układu to prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do funkcjonowania wszystkich naraz.

element „i", jego prawdopodobieństwo awarii to $P_{fi}=1-R_i$ $\Rightarrow$ $P_f=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P_{fi})=1-\prod_{i=1}^{n} R_i$

jeśli $P_{fi}=\text{const}$ zachodzi $P_f=1-(1-P_{fi})^n$

W systemie szeregowym zachodzi $R < \min(R_1, R_2, \dots, R_n) = \min R_i$

np. a. $R_1 = 0{,}7$; $R_2 = 0{,}8$; $R_3 = 0{,}9$ $\qquad R = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$

b. $R_1 = R_2 = R_3 = 0{,}8$ $\qquad R = (0{,}8)^3 = 0{,}512$

także $p_f > \max(p_{f1}, p_{f2}, \dots, p_{fn}) = \max p_{fi}$

te same przypadki: a. $p_{f1} = 0{,}3$; $p_{f2} = 0{,}2$; $p_{f3} = 0{,}1$ $\qquad p_f = 1 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}496$

b. $p_{f1} = p_{f2} = p_{f3} = 0{,}2$ $\qquad p_f = 1 - (0{,}8)^3 = 0{,}488$

* POŁĄCZENIA RÓWNOLEGŁE ELEMENTÓW

przykład – układ podpory niezależnie z kilku stron, przez kilka niezależnych składników podporowych – awaria układu to awaria ich wszystkich, zaś stan niezawodny to funkcjonowanie przynajmniej jednego.

Awaria układu równoległego = JEDNOCZESNA awaria wszystkich elementów.

element „i", jego prawdopodobieństwo awarii to p_{fi} $\Rightarrow$ $p_f = \prod_{i=1}^{n} p_{fi}$

gdy $p_{fi} = const$ jest $p_f = (p_{fi})^n$

Podejście równoważne: niezawodność układu jest tożsama niezawodności choć jednego elementu – jest to prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do awarii wszystkich naraz.

element „i", jego niezawodność to R_i $\Rightarrow$ $R = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i)^n = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_{fi}$

gdy $R_i = const$ jest $R = 1 - (1 - R_i)^n$

W połączeniu równoległym zachodzi $p_f < \min(p_{f1}, p_{f2}, \dots, p_{fn}) = \min p_{fi}$

np. a. $p_{f1} = 0{,}3$; $p_{f2} = 0{,}2$; $p_{f3} = 0{,}1$ $\qquad p_f = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}006$

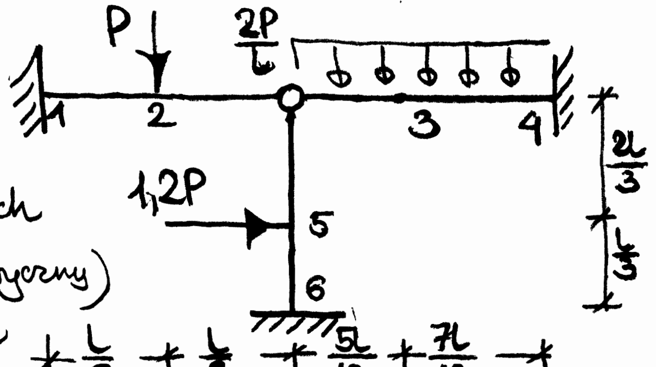
b. $p_{f1} = p_{f2} = p_{f3} = 0{,}2$ $\qquad p_f = (0{,}2)^3 = 0{,}008$

także $R > \max(R_1, R_2, \dots, R_n) = \max R_i$

te same przypadki: a. $R_1 = 0{,}7$; $R_2 = 0{,}8$; $R_3 = 0{,}9$ $\qquad R = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}994$

b. $R_1 = R_2 = R_3 = 0{,}8$ $\qquad R = 1 - (0{,}2)^3 = 0{,}992$

* Obliczyć niezawodność i prawdopodobieństwo awarii układu ramowego o elementach sprawczych – przekrojach krytycznych (postać zniszczenia przekroju – przegub plastyczny)



Przekrój poprzeczny – w całym układzie ta sama losowa zmienność,

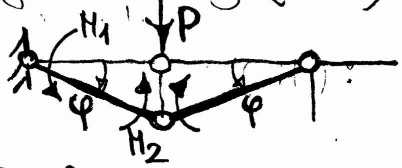
graniczny moment zginający: $\overline{M}_{pl} = 81{,}0$ kNm ; $\sigma_{M_{pl}} = 9{,}26$ kNm

Losowe obciążenie: $\overline{P} = 80{,}0$ kN ; $\sigma_P = 8{,}0$ kN . Długość $L = 4$ m

---

Minimalne krytyczne zbiory (MKZ) elementów sprawczych (bez elementów wspólnych)

$MKZ_1 = \{1, 2\}$



$$\left.\begin{aligned} L_Z &= P\cdot\varphi\cdot\frac{L}{2} \\ L_W &= M_1\varphi + 2M_2\varphi \end{aligned}\right\} P_I = \frac{2M_1}{L} + \frac{4M_2}{L} = \frac{M_1}{2} + M_2 \ [\text{kN}]$$

parametry losowej siły P_I: $\overline{P}_I = \frac{3}{2}\overline{M}_{pl} = 121{,}5$ kN ; $\sigma_{P_I} = 9{,}26\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 10{,}35$ kN

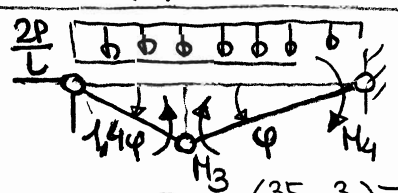
W elementarnym przypadku niezawodności $G = R - P$ (R- nośność, P- efekt obciążenia)

wskaźnik niezawodności $\beta = \frac{\overline{G}}{\sigma_G} = \frac{\overline{R} - \overline{P}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_P^2}}$; $P_f = F(-\beta)$; $\underset{\text{NIEZAWODNOŚĆ}}{R} = 1 - P_f = F(\beta)$

Wskaźnik niezawodności mechanizmu I: $\beta_1 = \frac{\overline{P}_I - \overline{P}}{\sqrt{\sigma_{P_I}^2 + \sigma_P^2}} = \frac{121{,}5 - 80}{\sqrt{10{,}35^2 + 8^2}} = 3{,}17$

jego niezawodność $R_1 = F(\beta_1) = 0{,}999238$

$MKZ_2 = \{3, 4\}$

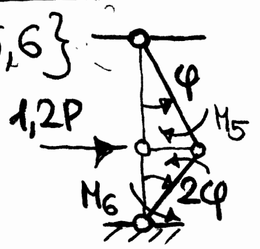


$$\left.\begin{aligned} L_Z &= \frac{2P}{L}\cdot L\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12}\varphi L = \frac{7}{12}P\varphi L \\ L_W &= 2{,}4M_3\varphi + M_4\varphi \end{aligned}\right\} P_{II} = \frac{36}{35}M_3 + \frac{3}{7}M_4 \ [\text{kN}]$$

Parametry losowej siły P_{II}: $\overline{P}_{II} = \left(\frac{35}{36} + \frac{3}{7}\right)\overline{M}_{pl} = 118{,}03$ kN ; $\sigma_{P_{II}} = 9{,}26\sqrt{\left(\frac{36}{35}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = 10{,}32$ kN

stąd $\beta_2 = \frac{\overline{P}_{II} - \overline{P}}{\sqrt{\sigma_{P_{II}}^2 + \sigma_P^2}} = \frac{118{,}03 - 80}{\sqrt{10{,}32^2 + 8^2}} = 2{,}91$; $R_2 = F(\beta_2) = 0{,}99819$

$MKZ_3 = \{5, 6\}$



$$\left.\begin{aligned} L_Z &= 1{,}2P\cdot\frac{2}{3}\varphi L = 0{,}8P\varphi L \\ L_W &= 3M_5\varphi + 2M_6\varphi \end{aligned}\right\} P_{III} = \frac{15}{16}M_5 + \frac{5}{8}M_6 \ [\text{kN}]$$

$\overline{P}_{III} = \left(\frac{15}{16} + \frac{5}{8}\right)\overline{M}_{pl} = 126{,}56$ kN ; $\sigma_{P_{III}} = 9{,}26\sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2} = 10{,}43$ kN

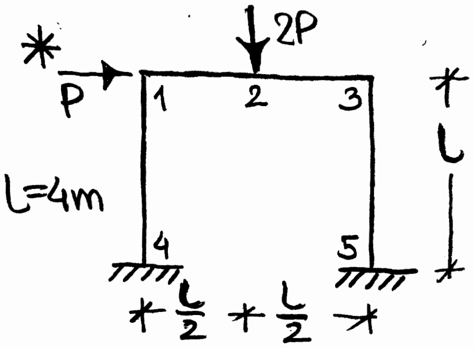
$\beta_3 = \frac{\overline{P}_{III} - \overline{P}}{\sqrt{\sigma_{P_{III}}^2 + \sigma_P^2}} = \frac{126{,}56 - 80}{\sqrt{10{,}43^2 + 8^2}} = 3{,}54$; $R_3 = F(\beta_3) = 0{,}9998$

Układ – szeregowy system niezawodności o składnikach: MKZ_i, $i = 1, 2, 3$

o niezawodnościach $R_1 = 0{,}999238$; $R_2 = 0{,}99819$; $R_3 = 0{,}9998$

stąd niezawodność układu $R = \prod_{i=1}^{3} R_i = 0{,}9972 < \min R_i$

odpowiadający jej wskaźnik niezawodności $\beta = 2{,}77 < \min \beta_i$

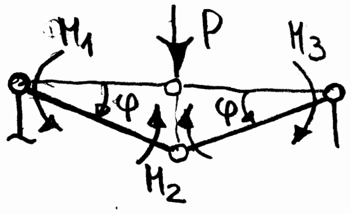


Określić niezawodność i prawdopodobieństwo awarii, nośność obliczeniową na poziomie $t=3$ układu pod obciążeniem losowym $P \to N(40,4)$ [kN]

Graniczny moment zginający przekrojów $M_{pl} \to N(81;9{,}26)$ [kNm]

Analiza losowa poszczególnych mechanizmów zniszczenia:

$MKZ_1 = \{1,2,3\}$

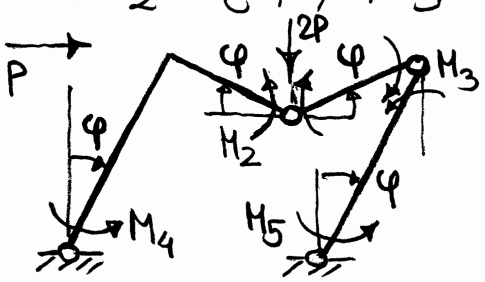


$$\left.\begin{aligned} L_W &= M_1\cdot\varphi + M_2\cdot 2\varphi + M_3\cdot\varphi \\ L_Z &= 2P\cdot\varphi\cdot\frac{L}{2} = P\cdot\varphi\cdot L \end{aligned}\right\} P_I = \frac{M_1}{4} + \frac{M_2}{2} + \frac{M_3}{4}\ [\mathrm{kN}]$$

$$\overline{P}_I = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\overline{M}_{pl} = 81{,}0\ \mathrm{kN}\ ;\ \sigma_{P_I} = 9{,}26\sqrt{2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5{,}67\ \mathrm{kN}$$

$$\beta_1 = \frac{\overline{P}_I - \overline{P}}{\sqrt{\sigma_{P_I}^2+\sigma_P^2}} = \frac{81{,}0-40}{\sqrt{5{,}67^2+4^2}} = 5{,}90$$

$MKZ_2 = \{2,3,4,5\}$

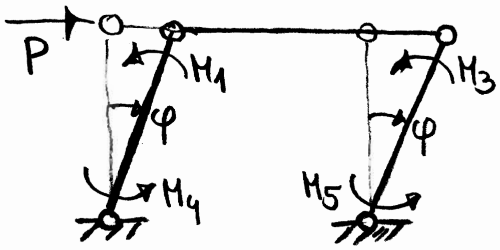


$$\left.\begin{aligned} L_W &= 2M_2\varphi + 2M_3\varphi + M_4\varphi + M_5\varphi \\ L_Z &= 2P\varphi\frac{L}{2} + P\varphi L = 2P\varphi L \end{aligned}\right\} P_{II} = \frac{M_2}{4} + \frac{M_3}{4} + \frac{M_4}{8} + \frac{M_5}{8}\ [\mathrm{kN}]$$

$$\overline{P}_{II} = \left(2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{8}\right)\overline{M}_{pl} = 60{,}75\ \mathrm{kN}\ ;\ \sigma_{P_{II}} = 9{,}26\sqrt{2\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\left(\frac{1}{8}\right)^2} = 3{,}66\ \mathrm{kN}$$

$$\beta_2 = \frac{\overline{P}_{II} - \overline{P}}{\sqrt{\sigma_{P_{II}}^2+\sigma_P^2}} = \frac{60{,}75-40}{\sqrt{3{,}66^2+4^2}} = 3{,}83$$

$MKZ_3 = \{1,3,4,5\}$



$$\left.\begin{aligned} L_W &= M_1\varphi + M_3\varphi + M_4\varphi + M_5\varphi \\ L_Z &= P\varphi L \end{aligned}\right\} P_{III} = \frac{M_1}{4} + \frac{M_3}{4} + \frac{M_4}{4} + \frac{M_5}{4}\ [\mathrm{kN}]$$

$$\overline{P}_{III} = 4\cdot\frac{1}{4}\overline{M}_{pl} = 81{,}0\ \mathrm{kN}\ ;\ \sigma_{P_{III}} = 9{,}26\sqrt{4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 4{,}63\ \mathrm{kN}$$

$$\beta_3 = \frac{\overline{P}_{III} - \overline{P}}{\sqrt{\sigma_{P_{III}}^2+\sigma_P^2}} = \frac{81{,}0-40}{\sqrt{4{,}63^2+4^2}} = 6{,}70$$

Poszczególne minimalne krytyczne zbiory (MKZ_i, $i=1,2,3$) – mechanizmy – zawierają wspólne elementy sprawcze – przekroje krytyczne – nie jest to więc szeregowy model niezależnych od siebie mechanizmów zniszczenia.

Mechanizmem o najmniejszej wartości średniej obciążenia P_{gr}, zarazem najmniejszym wskaźniku niezawodności β, jest MKZ_2.

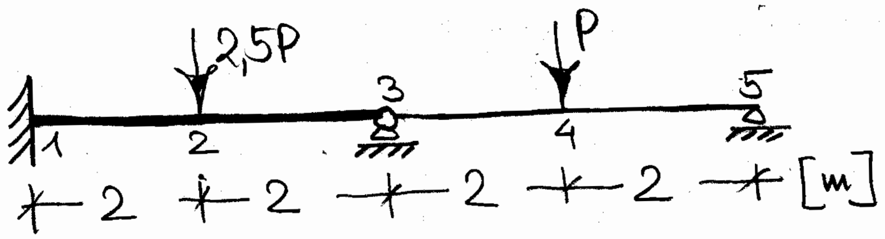
stąd parametry losowej nośności układu: $\overline{P}_{gr} = \overline{P}_{II} = 60{,}75$ kN

$\sigma_{P_{gr}} = \sigma_{P_{II}} = 3{,}66$ kN

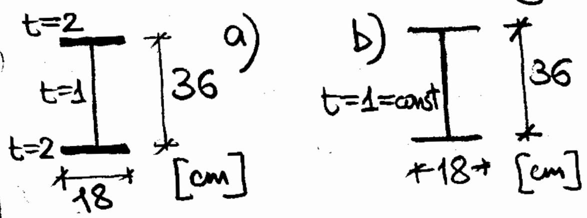
Wskaźnik niezawodności układu $\beta = 3{,}83$; niezawodność $R = F(3{,}83) = 0{,}99993$

nośność obliczeniowa na poziomie istotności (tolerancji) $t=3$: $P_0 = \overline{P}_{gr} - t\sigma_{P_{gr}} = 60{,}75 - 3\cdot 3{,}66 = 49{,}77$ kN

D17



Obliczyć niezawodność i wskaźnik niezawodności belki na rys.



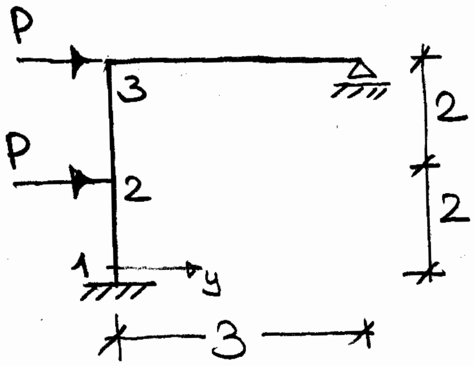
Przedział 1-3 – przekrój cienkościenny a)

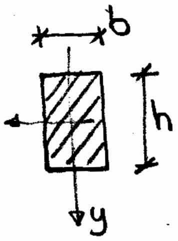
Przedział 3-5 – przekrój cienkościenny b)

Granica plastyczności stali $R_{pl} \to N(200,6)$ [MPa]

Losowe obciążenie $P \to N(180,5)$ [kN]

D18





Obliczyć niezawodność układu pod działaniem obciążenia P = 15 kN.

Wymiary przekroju prostokątnego:

$b \to N(0,1; 0,01)$ [m], $h = 0,18$ [m]

Granica plastyczności $R_{pl} = 80$ MPa.

Podać parametry losowej nośności granicznej układu, określić nośność obliczeniową jako kwantyl rzędu 1%.