Mechanika budowli

dr inż. Karol Winkelmann

Katedra Mechaniki Budowli WILiś

na podstawie wykładów prof. Izabeli Lubowieckiej

Cele wykładu z mechaniki budowli

- Poznanie metod rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych:

  metody sił i metody przemieszczeń.

- Zrozumienie istoty różnic w zachowaniu się konstrukcji statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych przy podstawowych typach obciążeń, w zakresie statyki, stateczności i nośności granicznej.

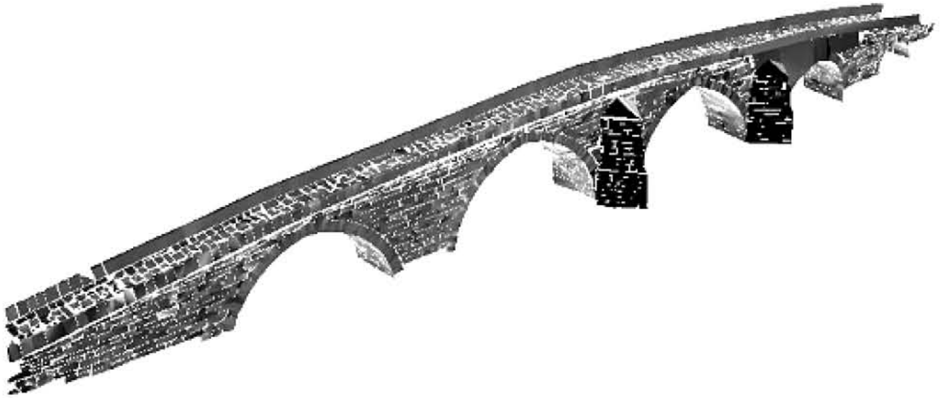
Podstawowe zagadnienia

- Założenia, podstawowe pojęcia i definicje.
- **Zasada pracy wirtualnej** dla ciała sztywnego.
- Zasada pracy wirtualnej dla ciała odkształcalnego. Obliczanie przemieszczeń w układach statycznie wyznaczalnych.
- Twierdzenia o wzajemności prac i twierdzenia z nich wynikające (o wzajemności reakcji, o wzajemności reakcji i przemieszczeń, metoda kinematyczna wyznaczania linii wpływu).

Podstawowe zagadnienia

- Rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych za pomocą **metody sił.**
- Rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych za pomocą **metody przemieszczeń.**
- Wykorzystanie symetrii układu.
- Obliczanie przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych - twierdzenie redukcyjne.
- **Stateczność** belek ciągłych i ram płaskich.
- **Nośność graniczna** belek i ram płaskich.

Typy konstrukcji



- Konstrukcja bryłowa

Trzy wymiary tego samego rzędu

- Konstrukcja płaska (powierzchniowa)

Dwa wymiary podobne, trzeci zdecydowanie mniejszy (grubość elementu)

- Konstrukcja typu prętowego

Jeden wymiar znacznie większy od pozostałych (długość)

Klasyczne założenia mechaniki budowli

- **ciągłość**

  materiał wypełnia konstrukcję w sposób ciągły, nie występują mikropęknięcia, pustki.

- **jednorodność**

  w każdym punkcie ciała materiał ma te same właściwości mechaniczne

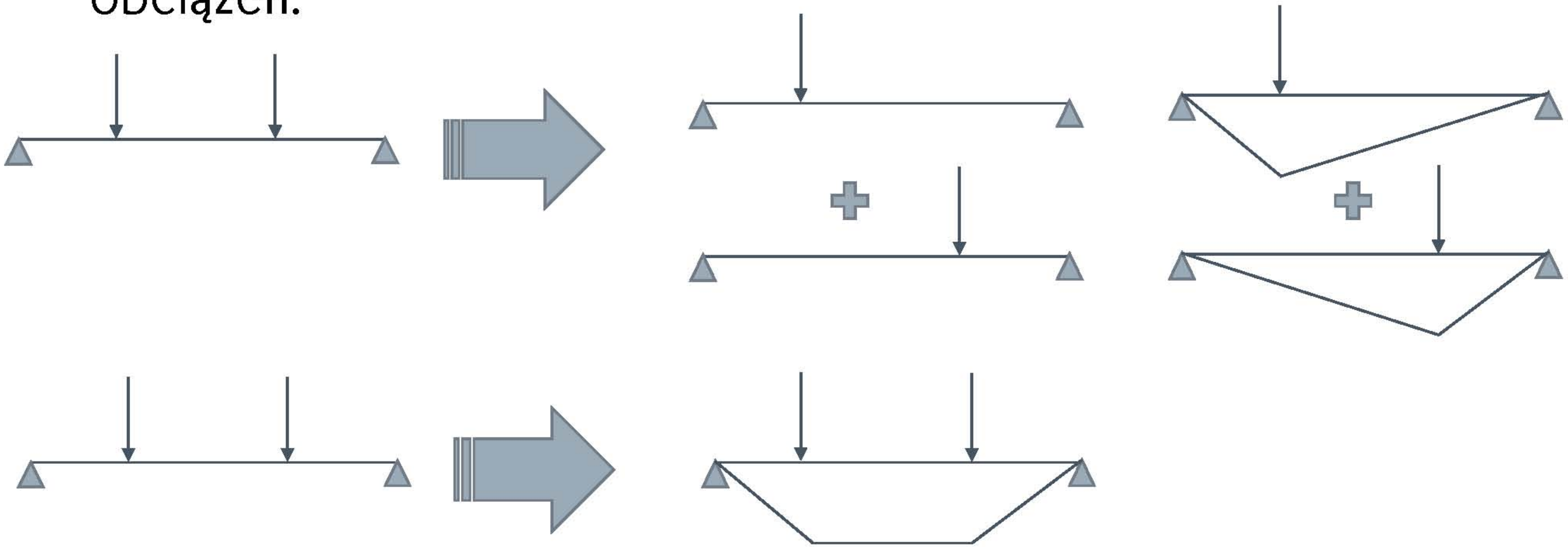
- **izotropowość**

  materiał ma takie same właściwości mechaniczne we wszystkich kierunkach; właściwości nie zależą od orientacji rozpatrywanej objętości elementarnej ciała

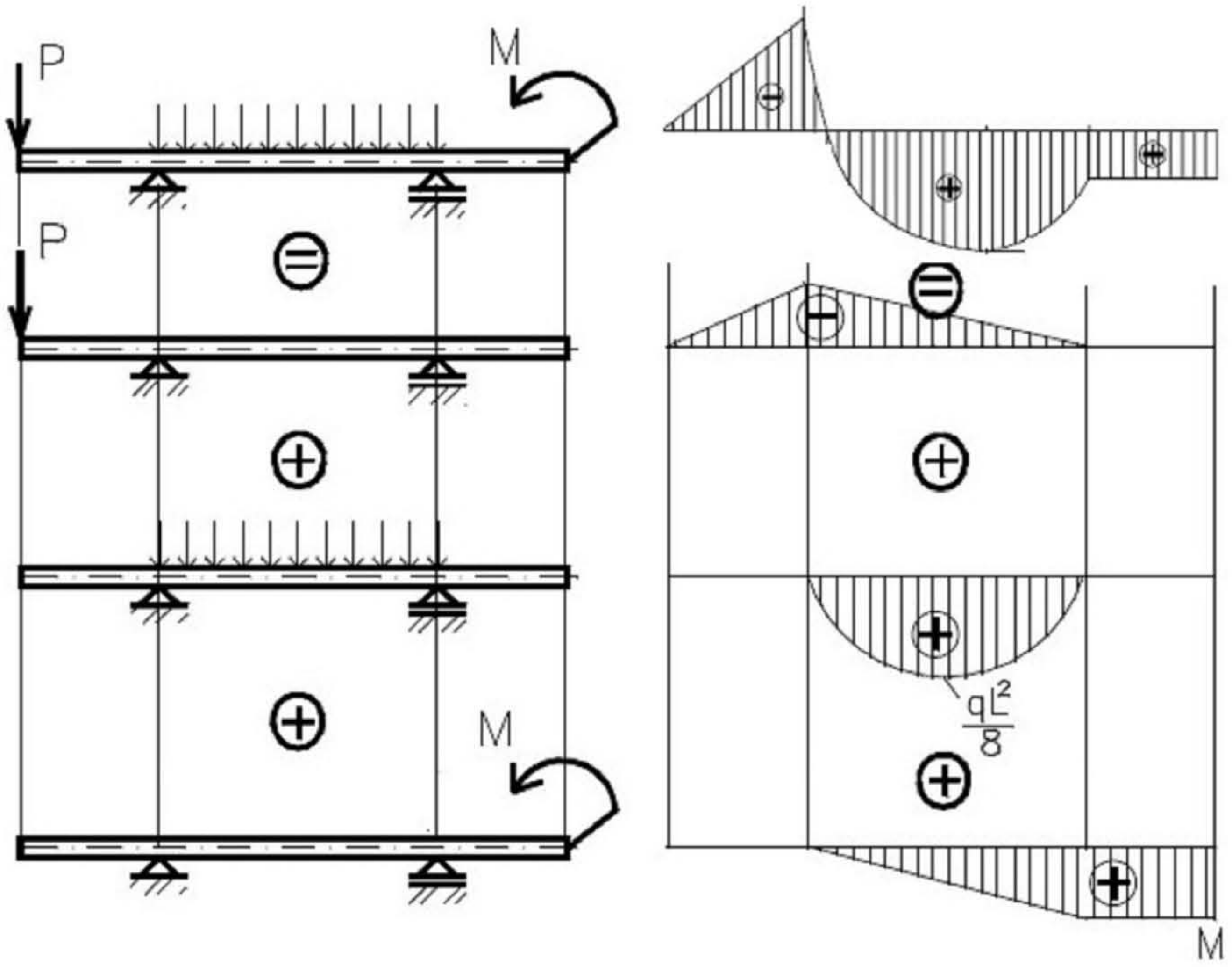
Klasyczne założenia mechaniki budowli

› **zasada superpozycji**

Efekt działania różnych obciążeń (siły wewnętrzne lub przemieszczenia) są sumą efektu działania niezależnie rozpatrywanych poszczególnych obciążeń.



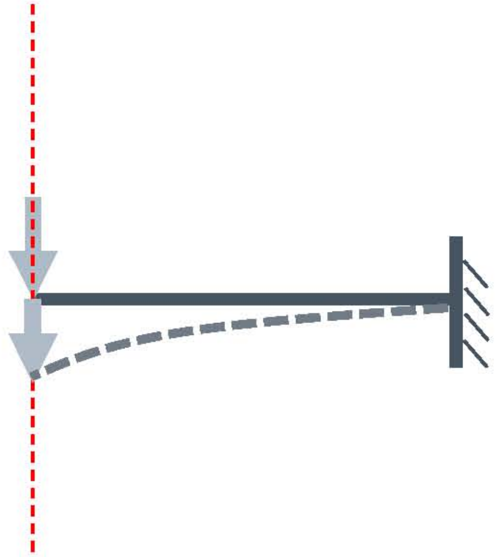
Superpozycja

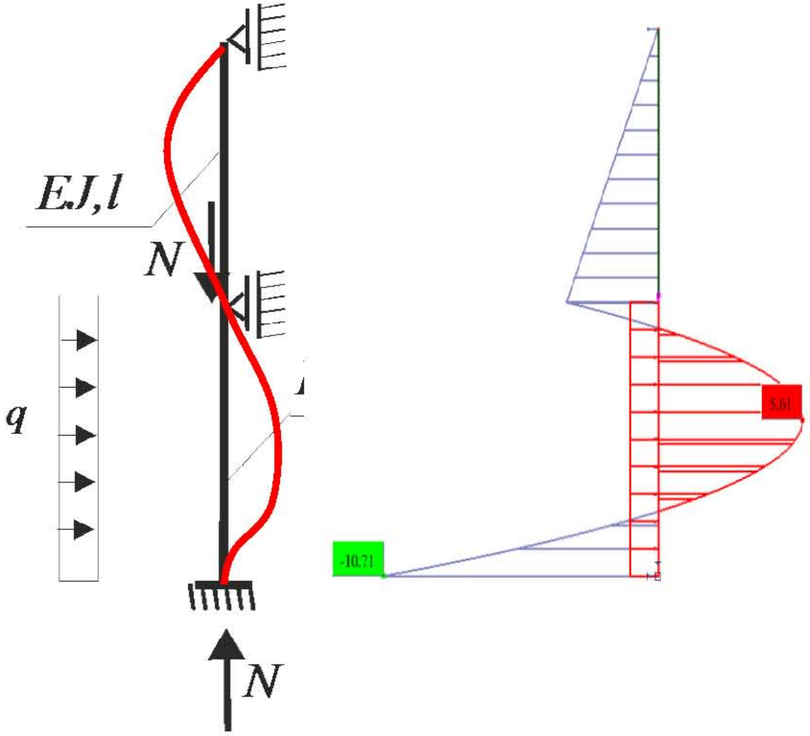


Klasyczne założenia mechaniki budowli

› zasada zesztywnienia

Pomijamy wpływ deformacji na zmianę rozkładu sił w konstrukcji

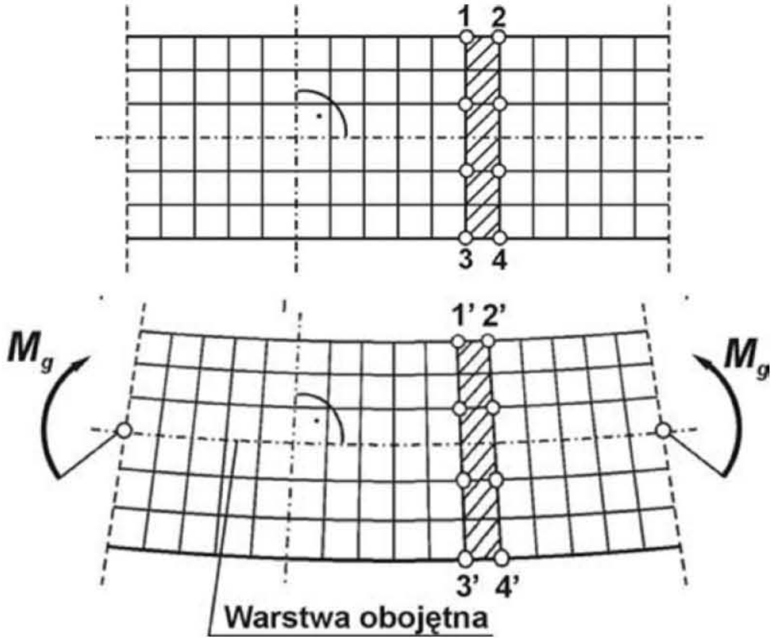




Klasyczne założenia mechaniki budowli

› płaskich przekrojów (Bernouliego)

Zakłada się, że przekrój płaski przeprowadzony myślowo w ciele nieodkształconym, chociaż może zmienić swe położenie przy odkształceniu ciała, pozostaje nadal płaski.

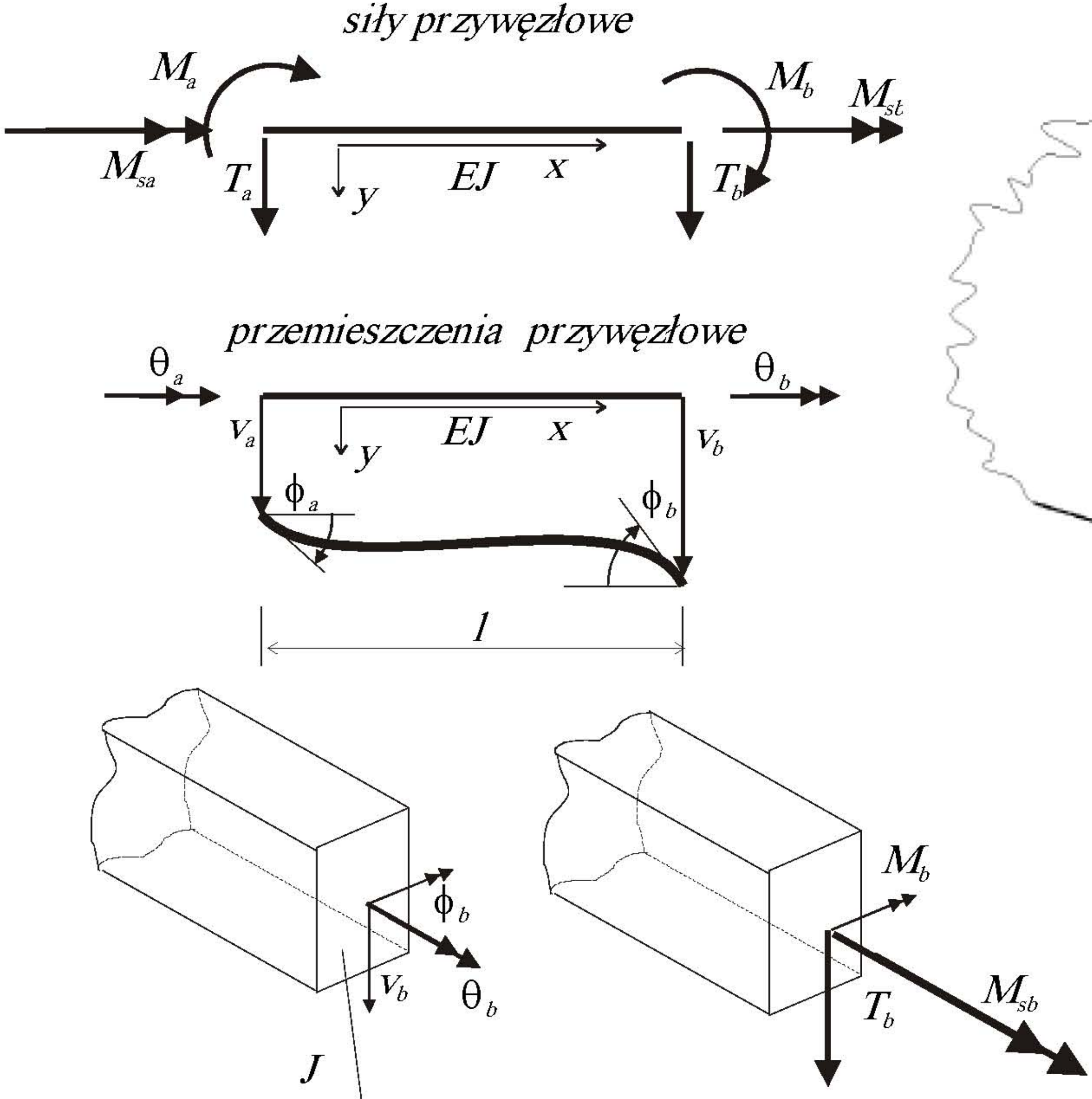


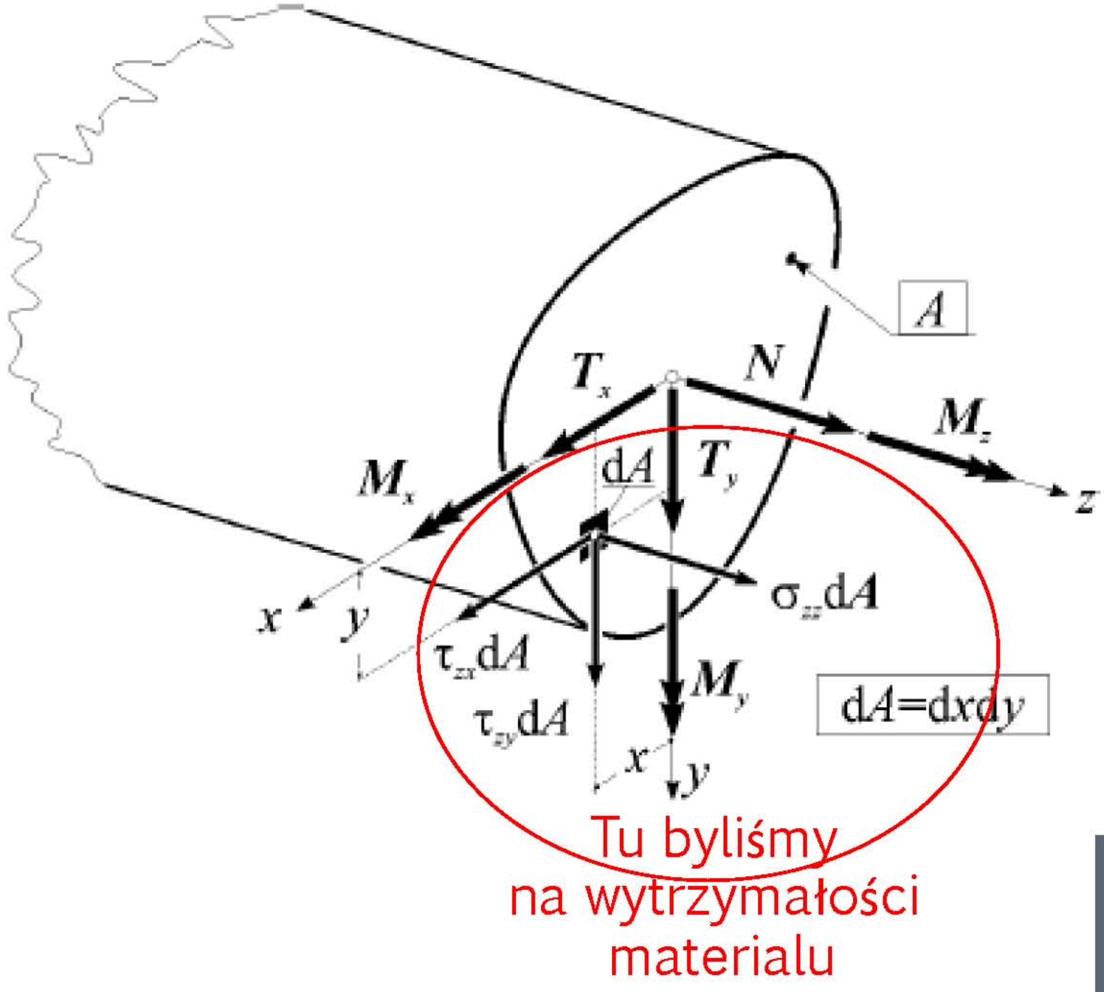
Klasyczne założenia mechaniki budowli

› zasada de Saint-Venanta

Siła działająca na ciało ma wpływ na rozkład naprężeń tylko w bliskim sąsiedztwie punktu przyłożenia siły.

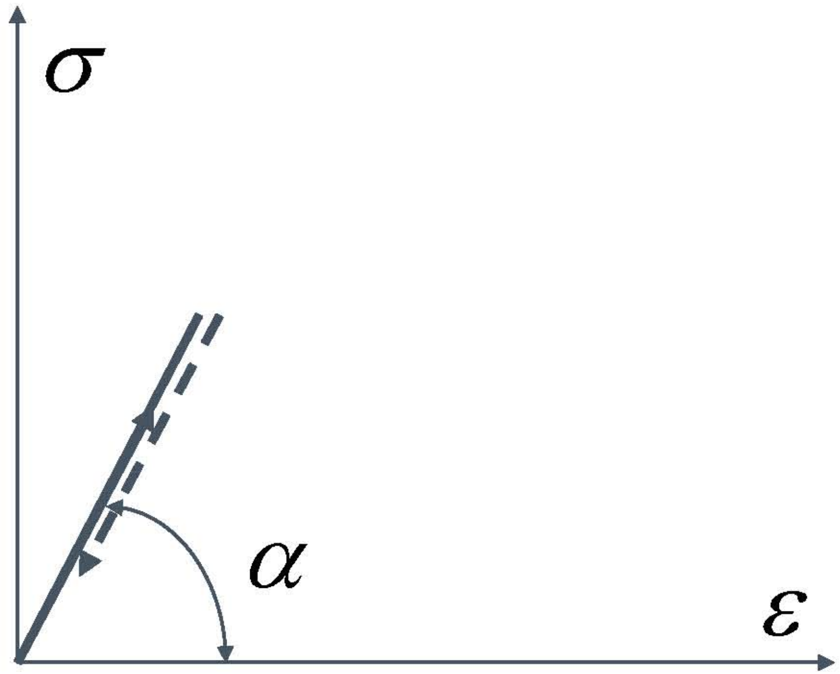
Analiza statyczna układów prętowych





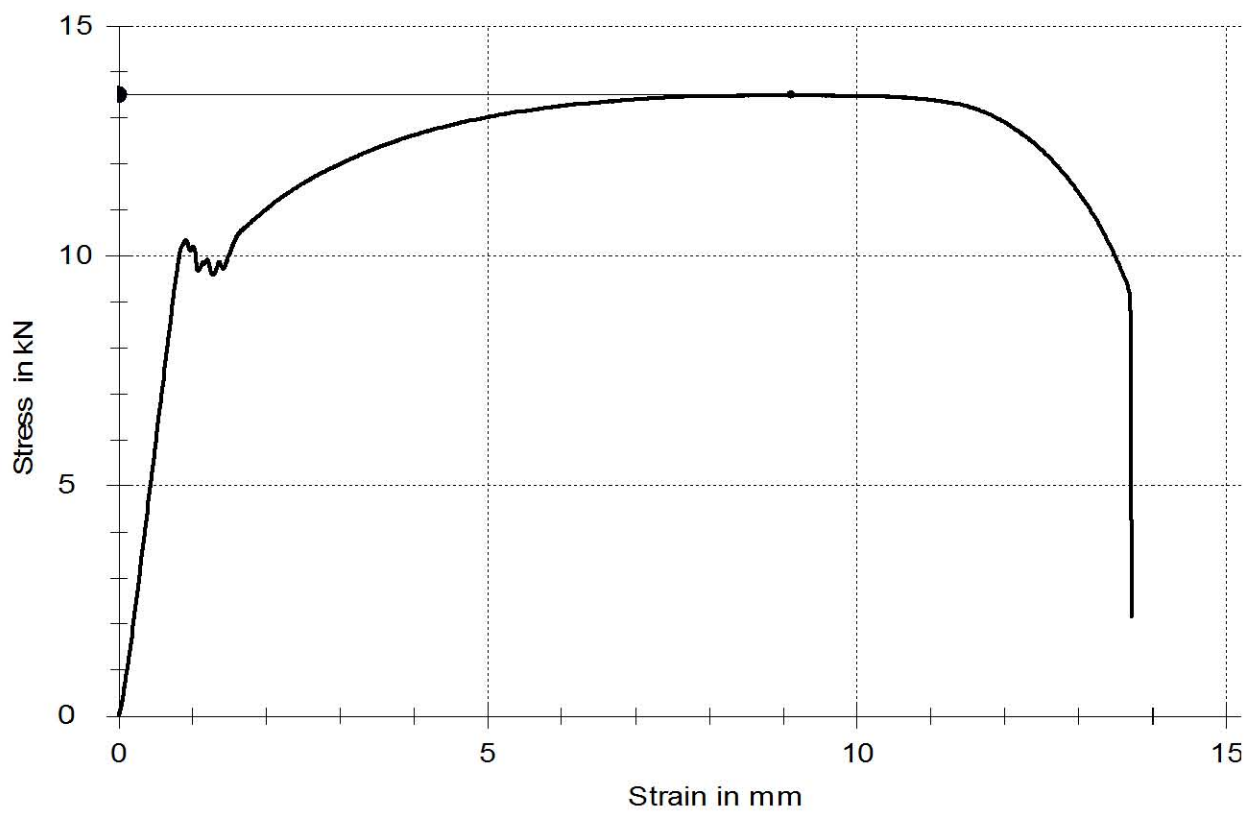
Klasyczne założenia mechaniki budowli

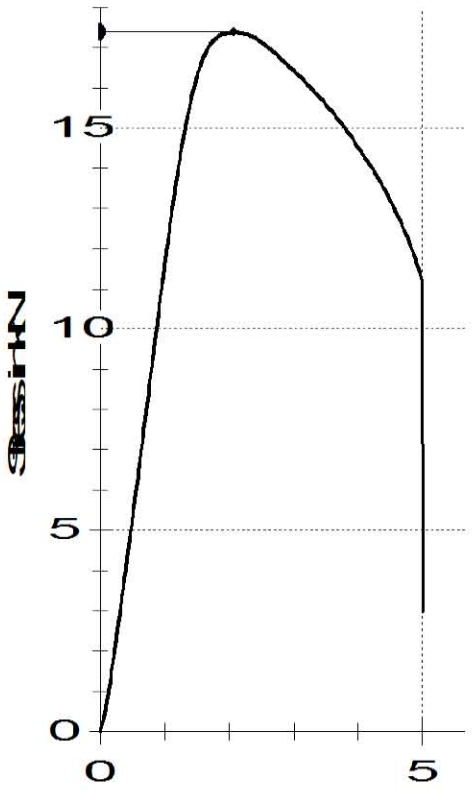
- materiał liniowo-sprężysty, $\sigma = \varepsilon E$



$$E = \mathrm{tg}\,\alpha$$

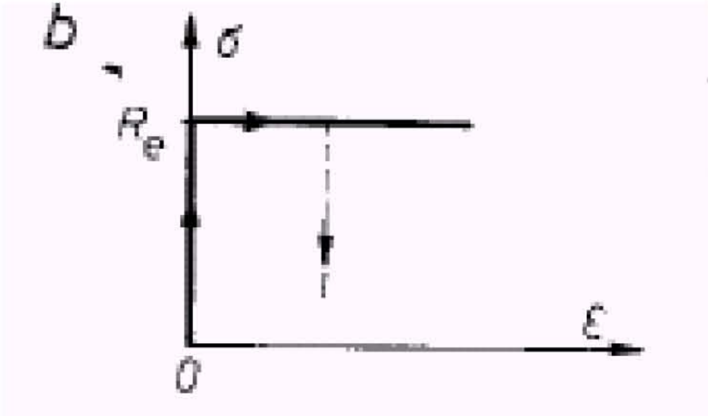
Zagadnienia wykraczające poza klasyczne założenia mechaniki – nieliniowość



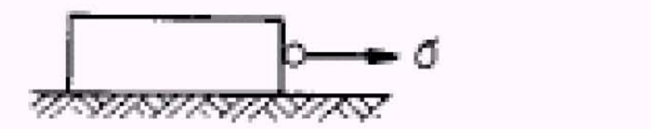


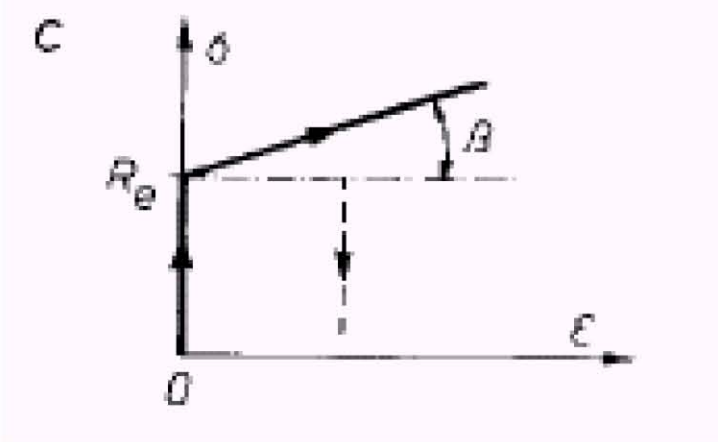
Wynik próby rozciągania stali - nieliniowość fizyczna

Modelowanie materiału – modele fizycznie nieliniowe

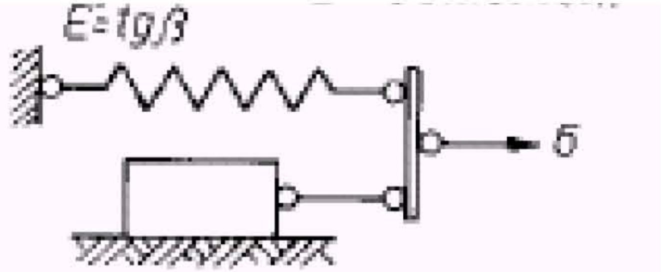


model sztywno-plastyczny

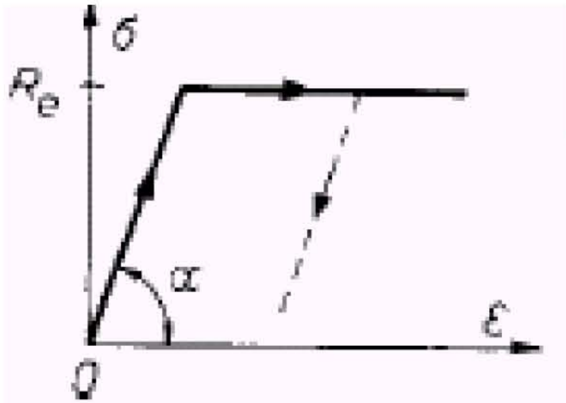




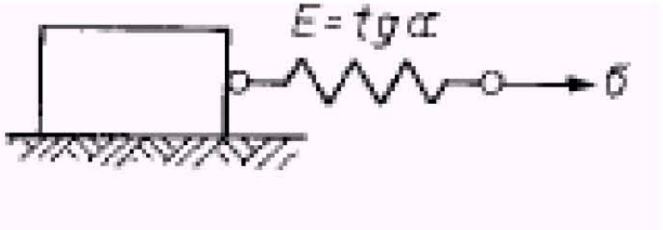
model sztywno-plastyczny ze wzmocnieniem

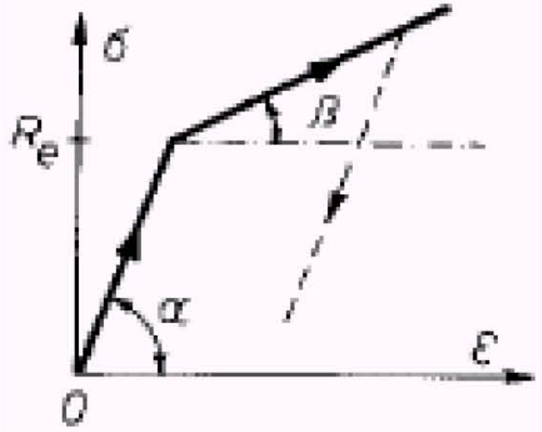


Modelowanie materiału – modele fizycznie nieliniowe

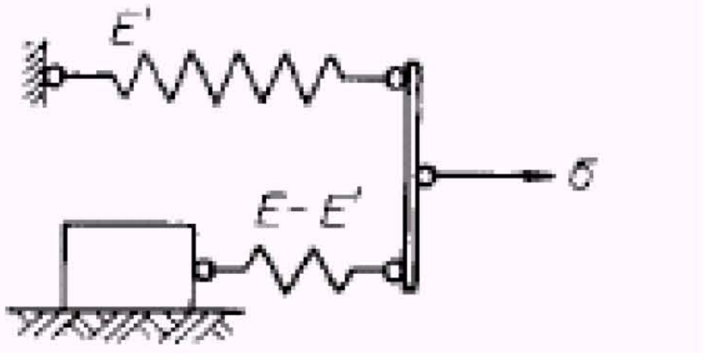


model sprężysto-plastyczny

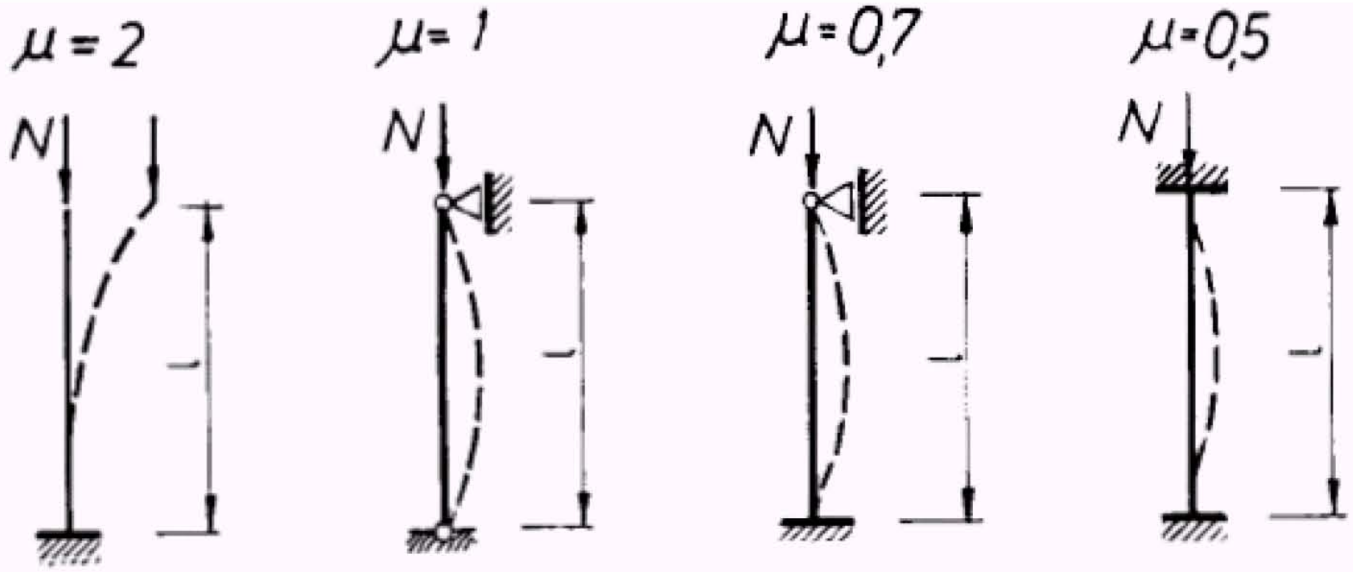




model sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem

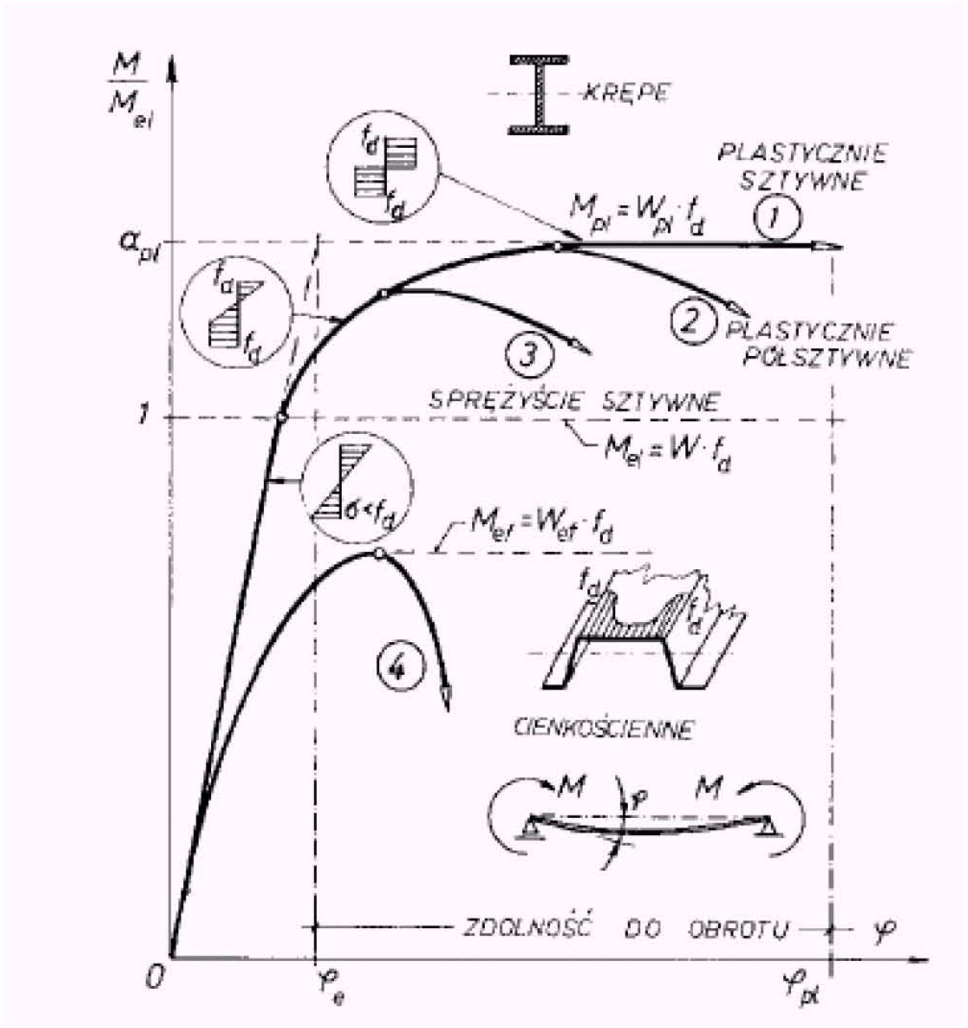


Nieliniowość geometryczna – stateczność



Rys. 4.11. Długości wyboczeniowe ściskanych prętów o różnych schematach statycznych

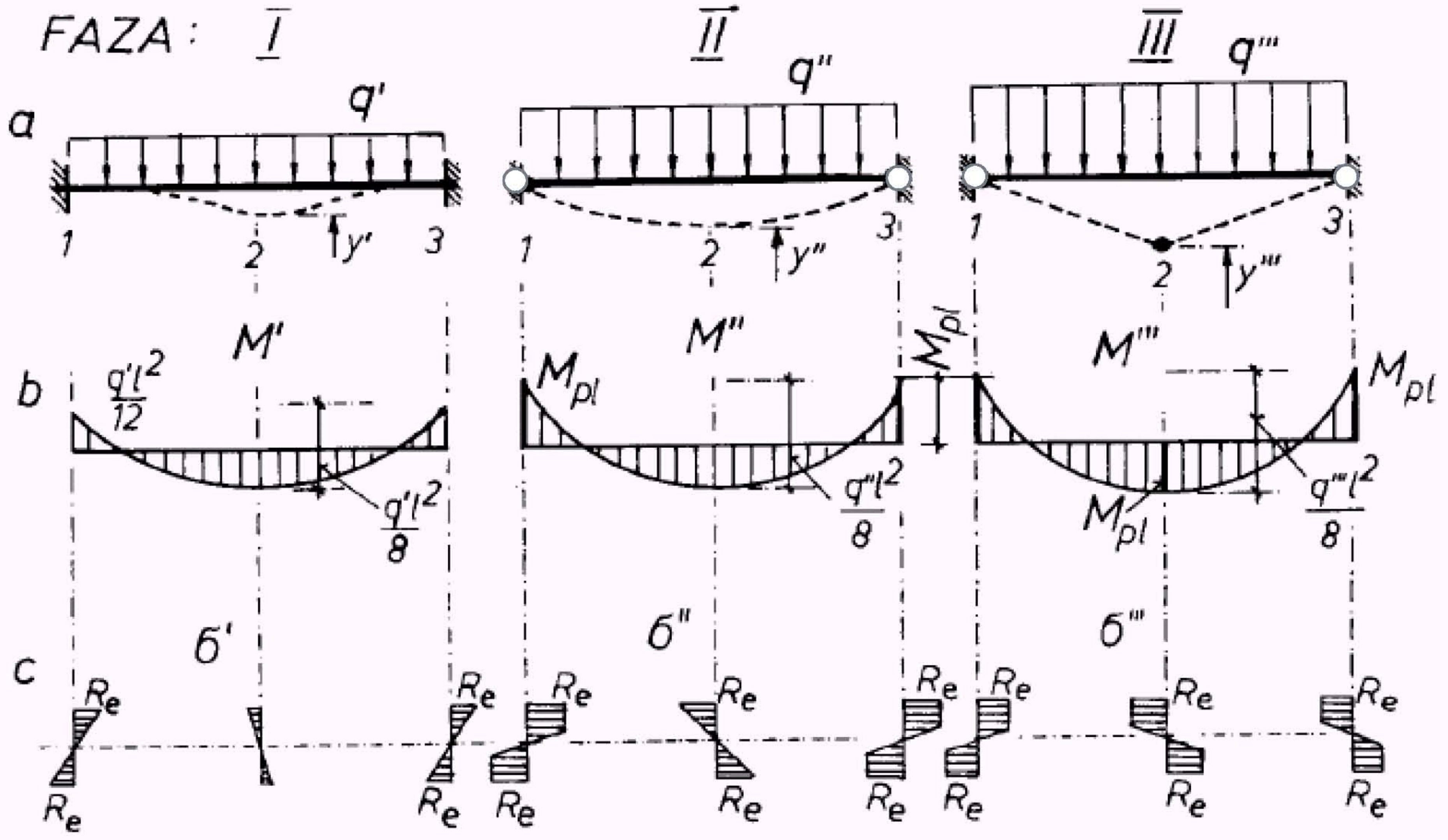
Nieliniowość geometryczna – stateczność, nośność graniczna



Wg norm projektowania konstrukcji stalowych rozróżnia się różne klasy przekrojów poprzecznych w zależności od możliwości uplastycznienia przekrojów (niektóre przekroje szybciej stracą stateczność niż mogłyby się uplastycznić)

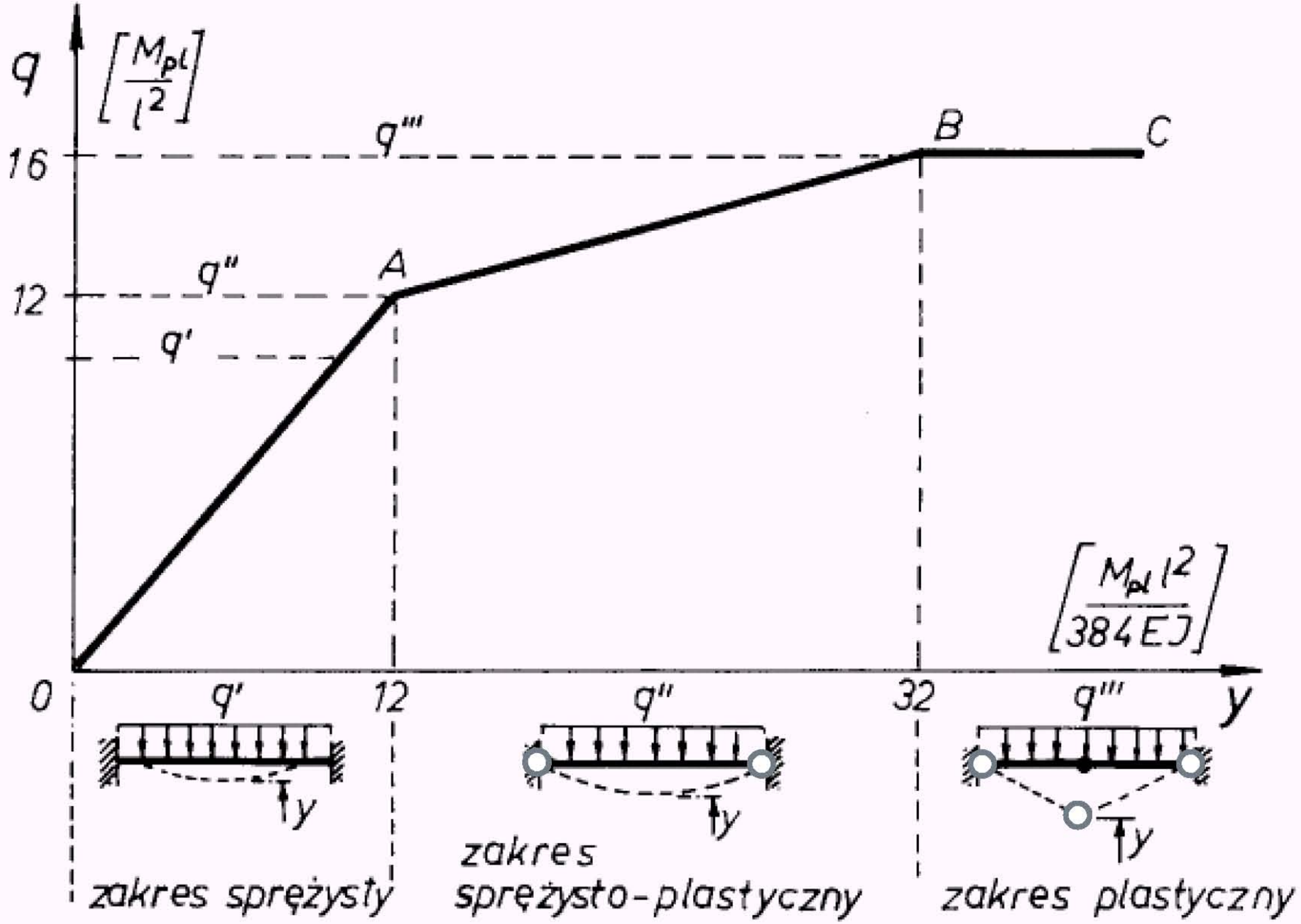
(A.Biegus: Nośność graniczna stalowych konstrukcji prętowych)

Nieliniowość geometryczna – nośność graniczna



Rys. 3.22. Wykresy momentów zginających (b) oraz rozkłady naprężeń w przekrojach (c) belki statycznie niewyznaczalnej (a) w sprężystej i pozasprężystej fazie obciążenia

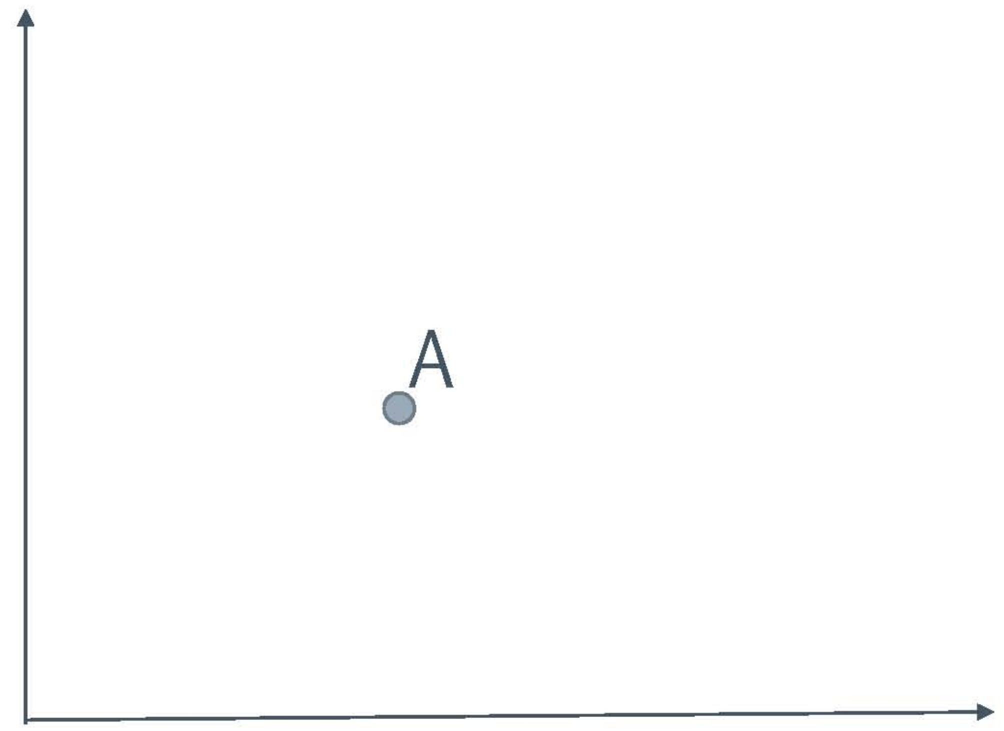
Nieliniowość geometryczna – nośność graniczna



Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

Punkt na płaszczyźnie...

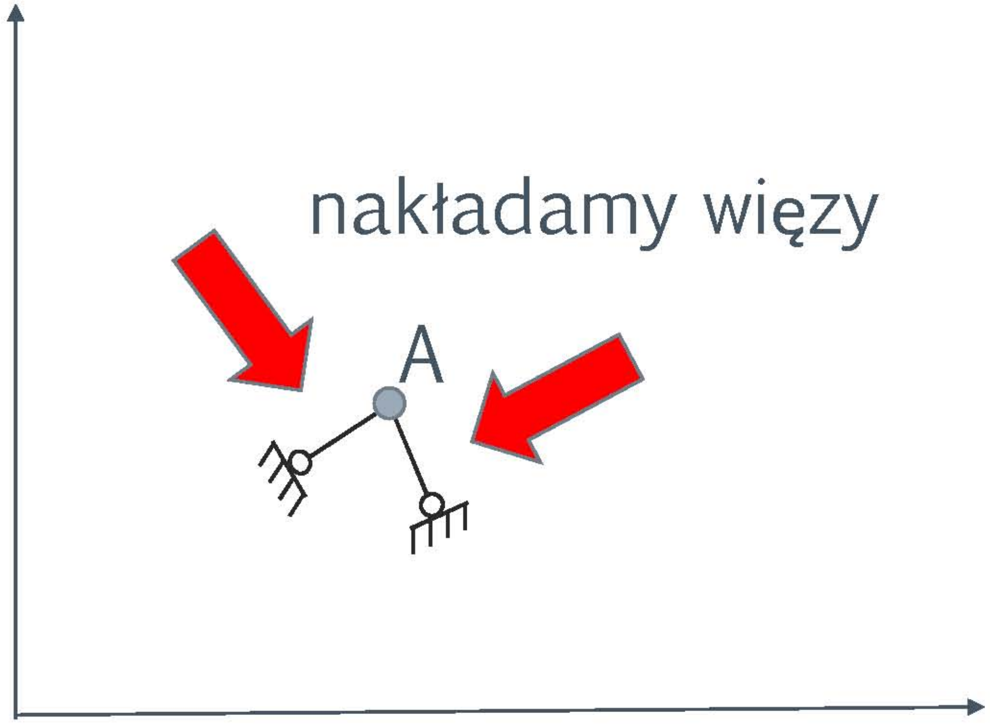
Jak go unieruchomić?



Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

Punkt na płaszczyźnie...

Jak go unieruchomić?

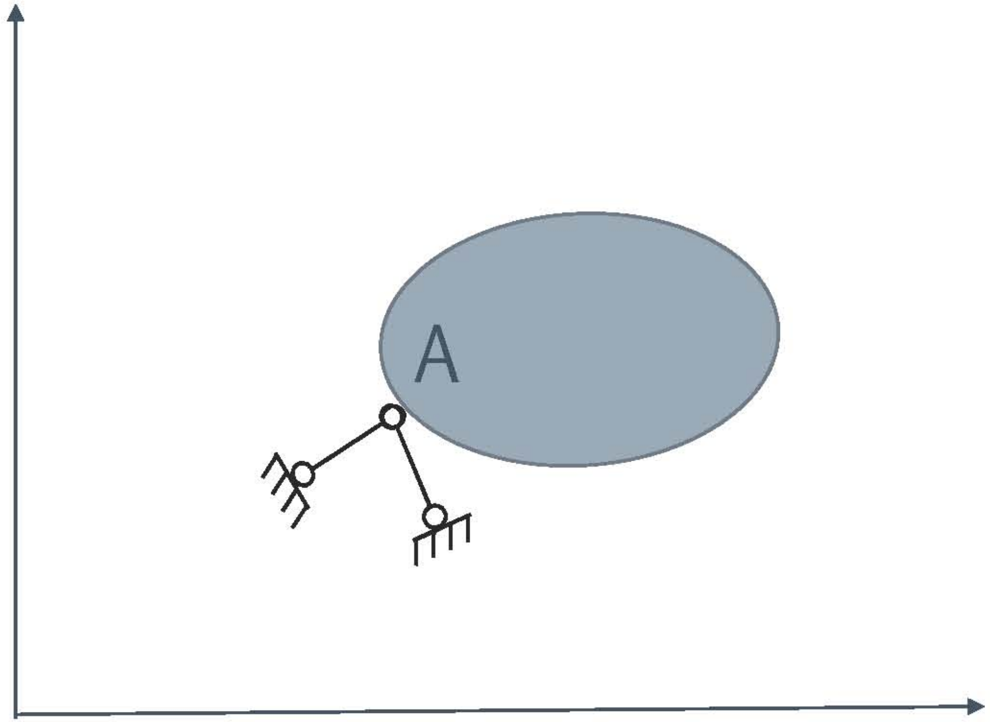


Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

Płaskie ciało doskonale **sztywne**

>> tarcza <<

Jak ją unieruchomić?

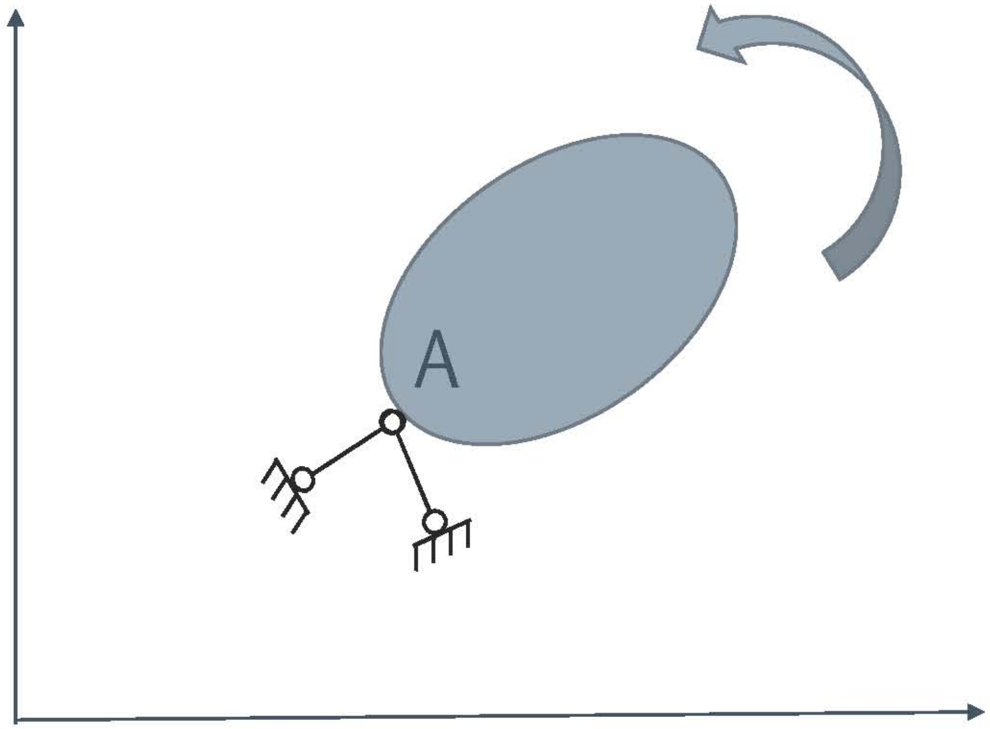


Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

Płaskie ciało doskonale **sztywne**

>> tarcza <<

Tak zamocowana może się obracać

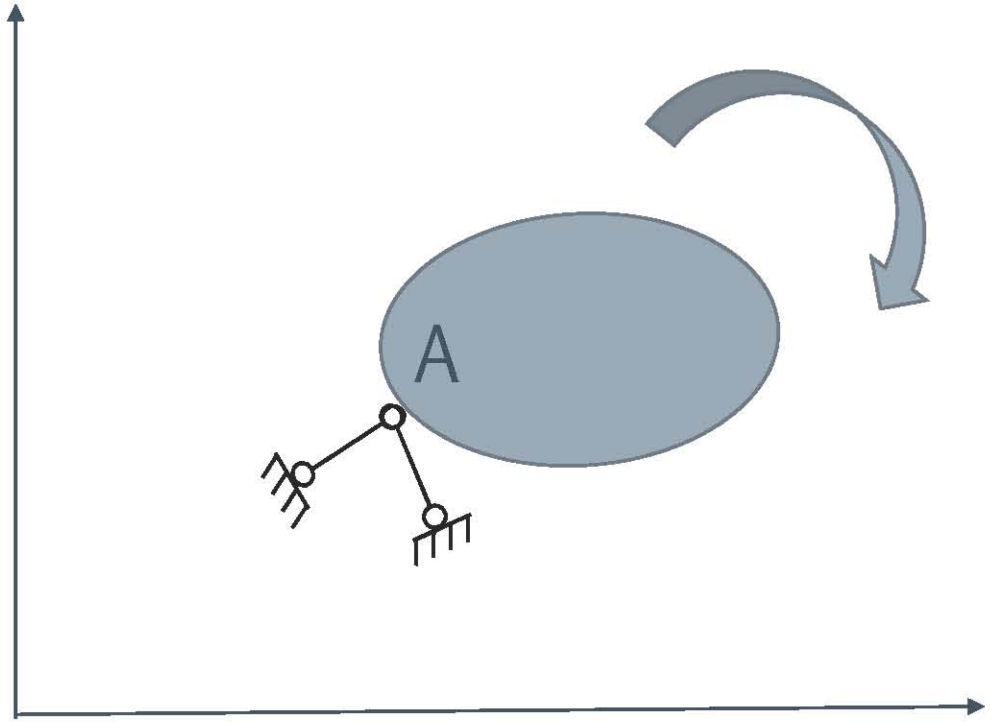


Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

Płaskie ciało doskonale **sztywne**

» tarcza «

Tak zamocowana może się obracać

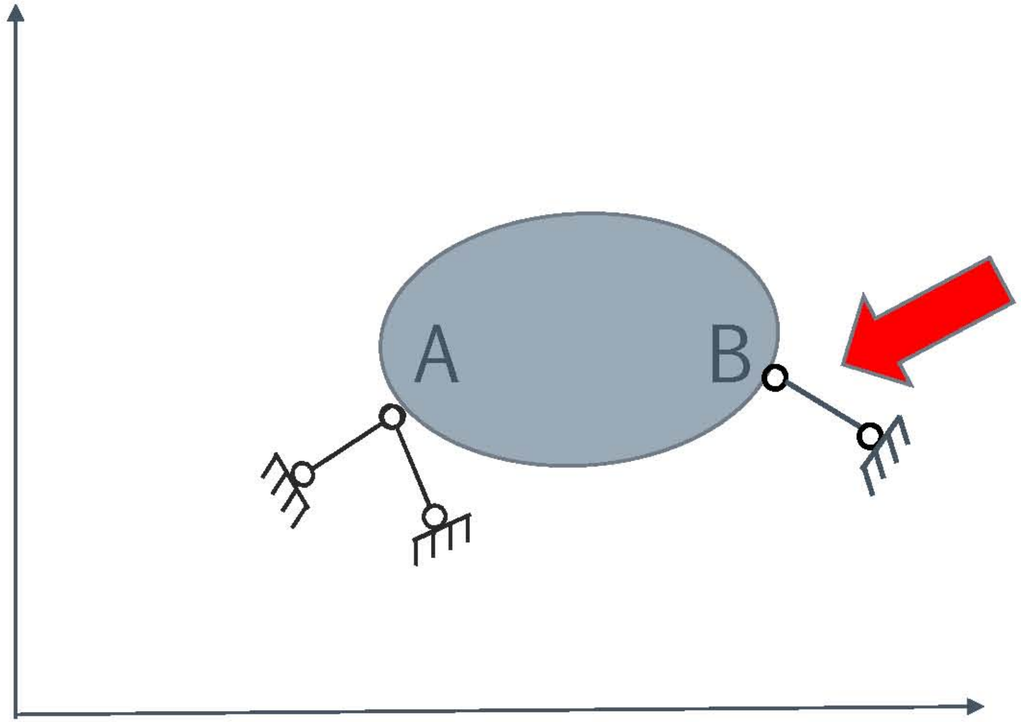


Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

Płaskie ciało doskonale **sztywne**

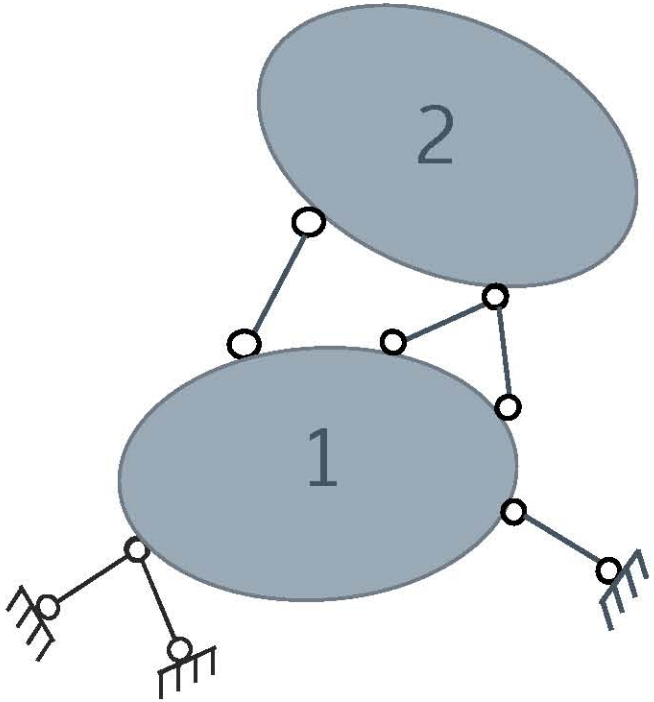
>> tarcza <<

Jak ją unieruchomić?



Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

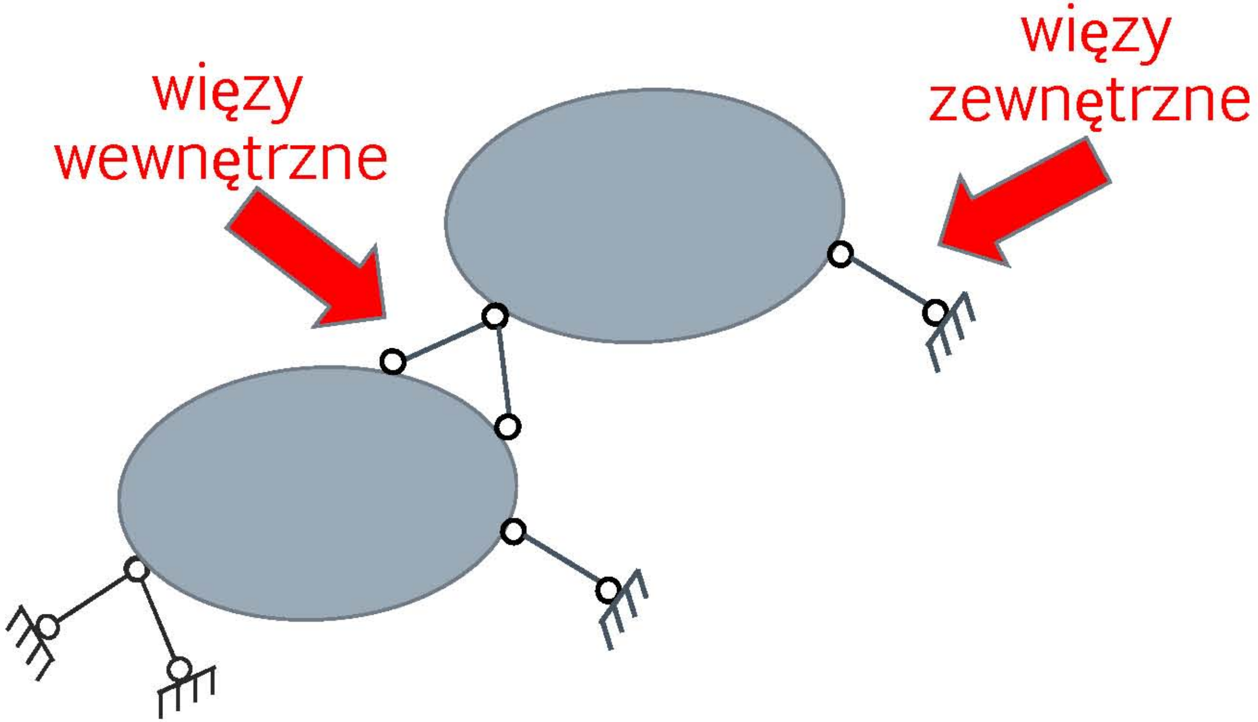
Jeżeli mamy więcej tarcz połączonych ze sobą...



Możemy trzema więzami połączyć tarczę 1 i 2 lub...

Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

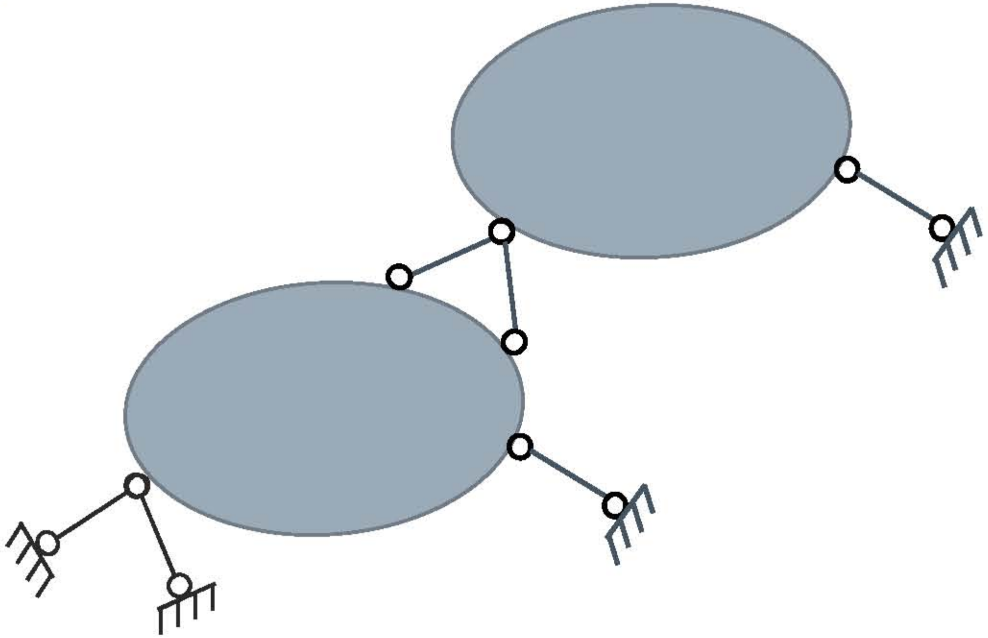
... lub nałożyć jednocześnie więzy wewnętrzne i zewnętrzne



Do unieruchomienia każdej tarczy potrzebujemy 3 więzy

Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

Jeżeli liczba tarcz = **t**, to minimalna liczba więzów/reakcji (**w**) potrzebna do zapewnienia geometrycznej niezmienności układu wyniesie **3t**



w = ?
t = ?

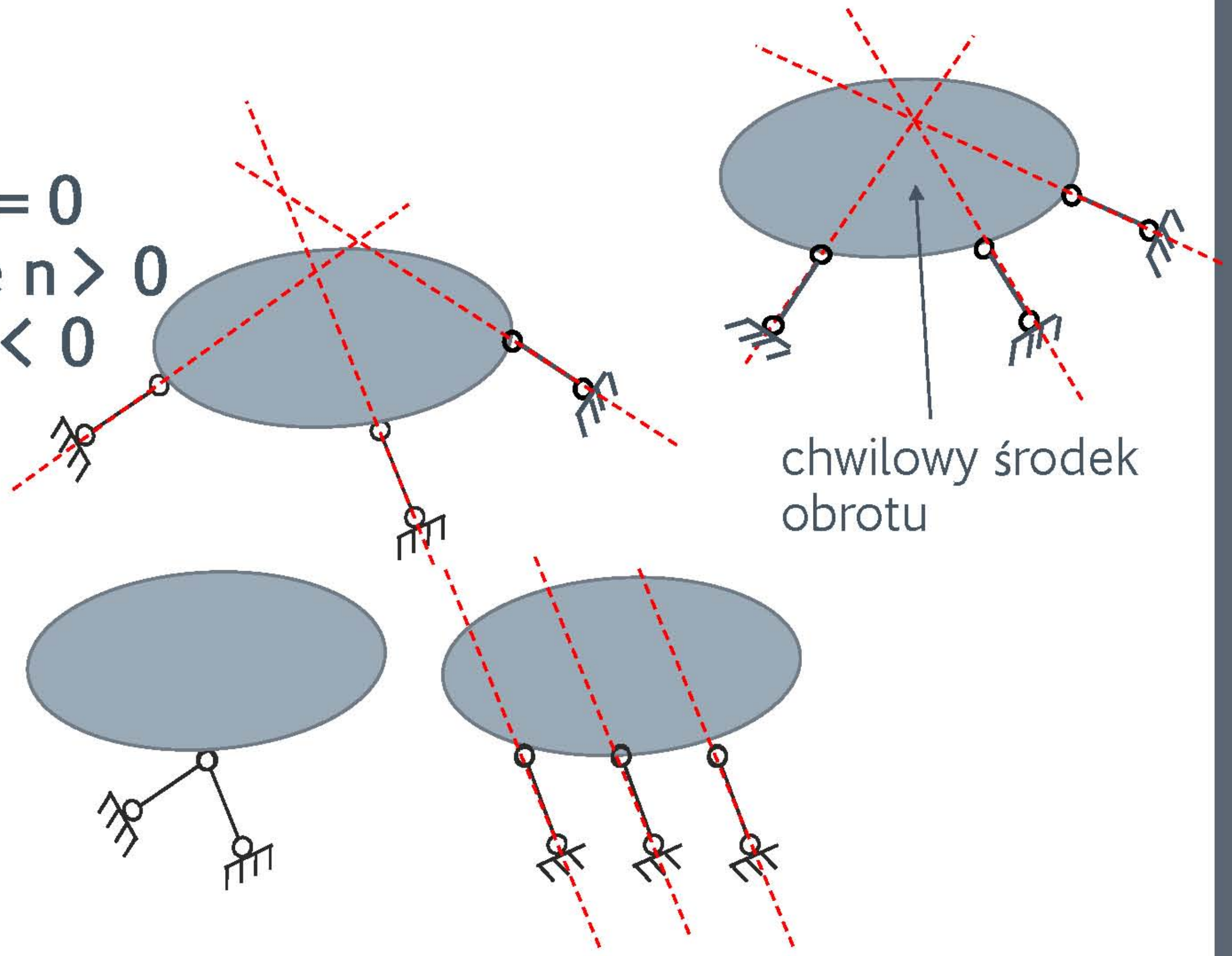
$s = 3t - w$ liczba stopni swobody układu
$n = w - 3t$ stopień statycznej niewyznaczalności układu

Stopień statycznej niewyznaczalności

$n = w - 3t$ (lub $n = r - 3t$)

Układy

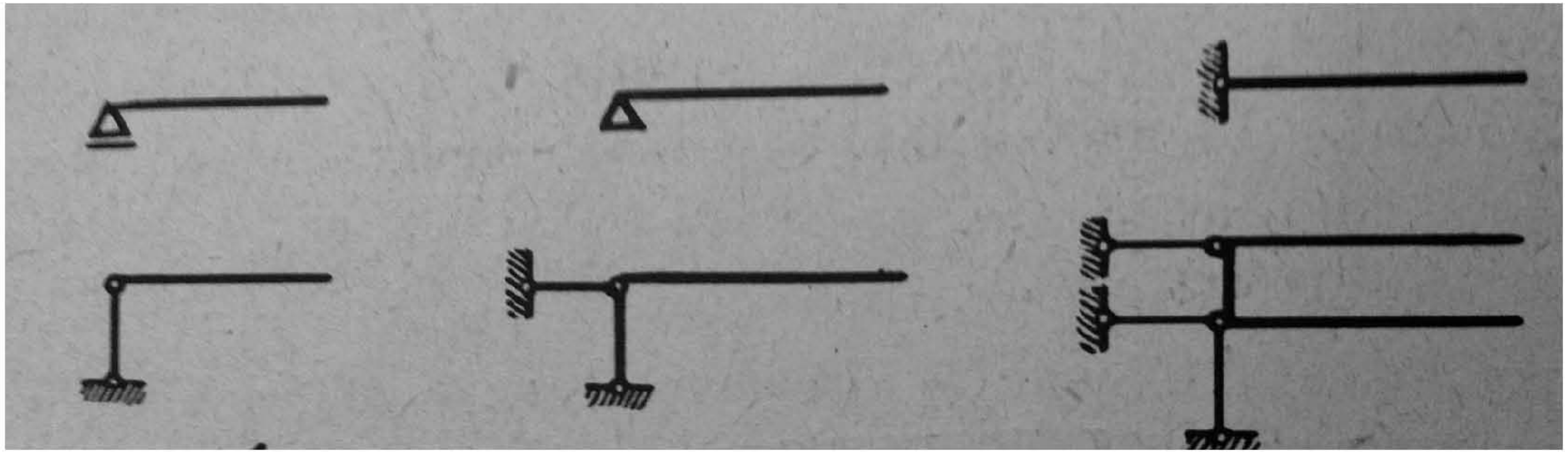
- statycznie wyznaczalne **$n = 0$**
- statycznie niewyznaczalne **$n > 0$**
- geometrycznie zmienne **$n < 0$**



Ale czy zawsze 3 więzy wystarczają?

Więzy zewnętrzne (podporowe) i wewnętrzne

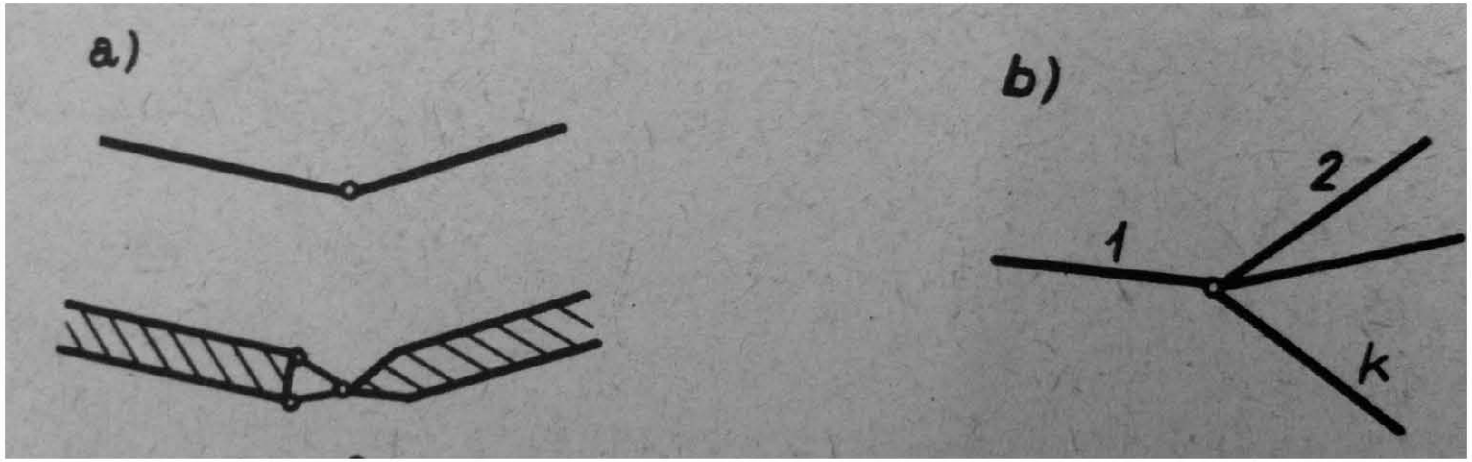
Liczba więzów zewnętrznych:



w = 1   w = 2   w = 3

Więzy zewnętrzne (podporowe) i wewnętrzne

Liczba więzów wewnętrznych:

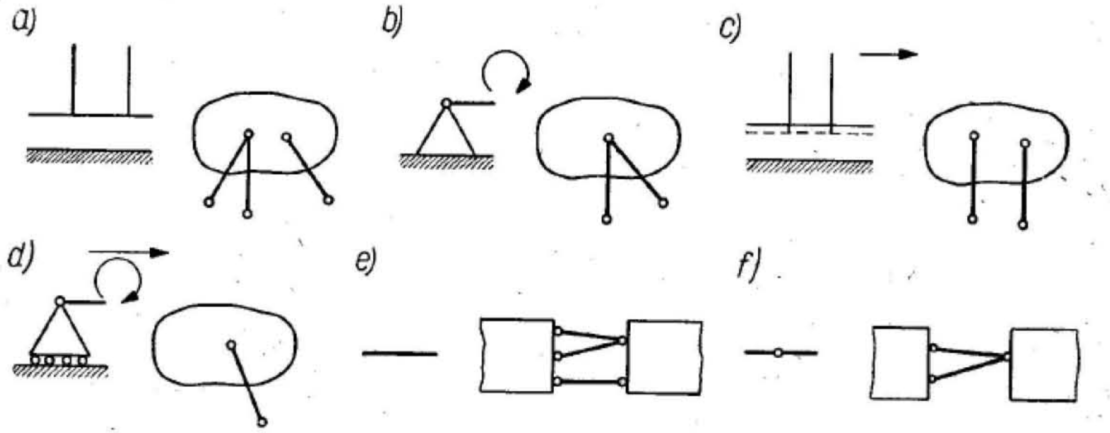


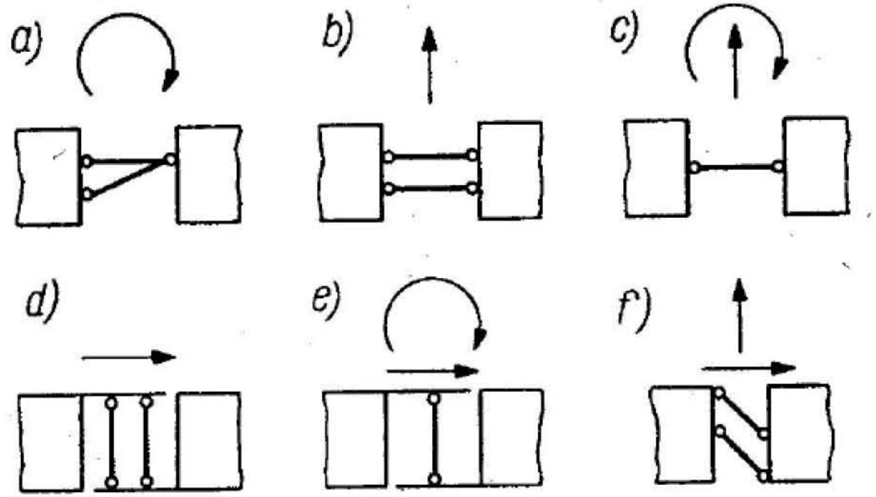
w = 2

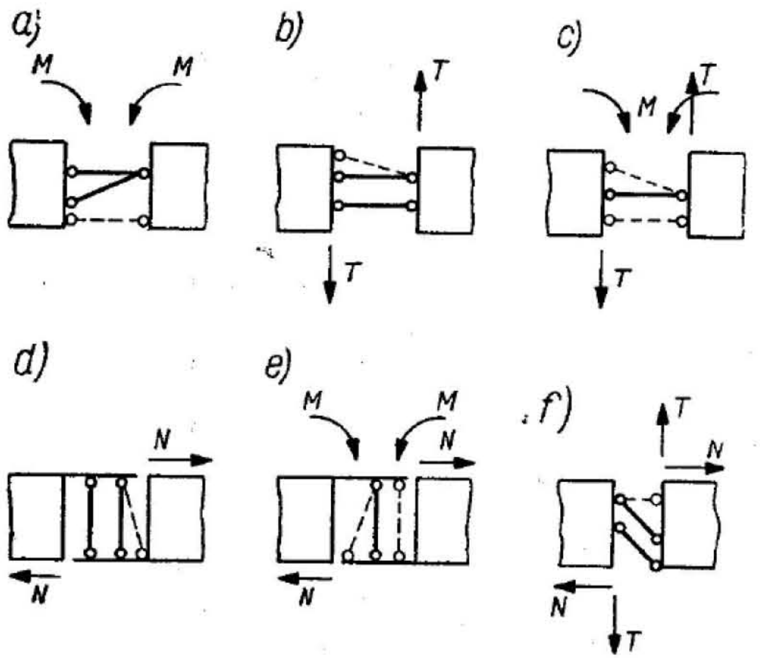
w = 2(k-1)

przegub wewnętrzny –> w = 2

Więzy zewnętrzne (podporowe) i wewnętrzne







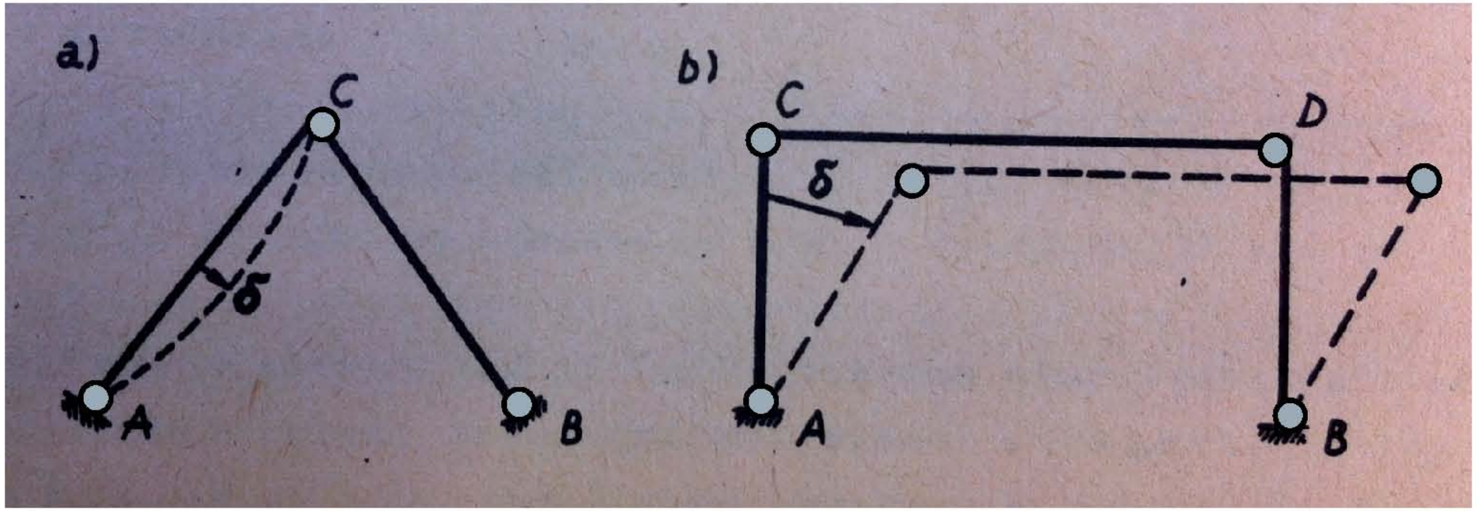
Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

- Układ a) ----→ r = 6; t = 2 czyli n = r – 3t = 6-6 = 0

(układ statycznie wyznaczalny)

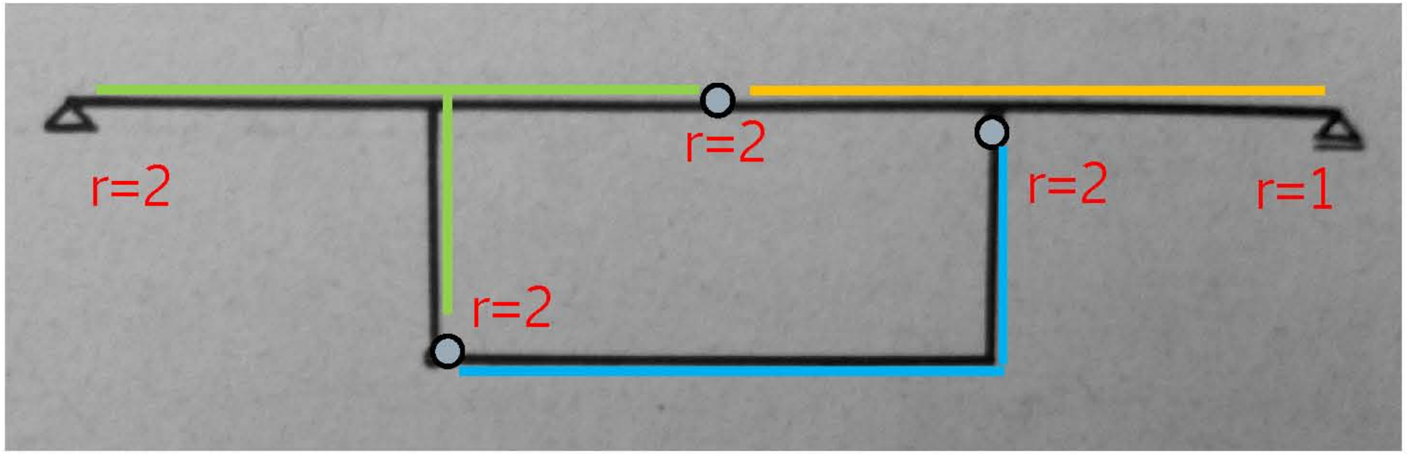
- Układ b) ----→ r = 8; t = 3 czyli n = r – 3t = 8-9 = -1

(układ chwiejny o 1 stopniu swobody)



Analiza kinematyczna budowy układów prętowych

- Układ statycznie wyznaczalny, $r = 9; t = 3$ czyli $n = r - 3t = 9\text{-}9 = 0$



Układ statycznie wyznaczalny a niewyznaczalny

› W układzie statycznie **wyznaczalnym** siły wewnętrzne mogą powstać tylko pod wpływem obciążeń czynnych czyli sił zewnętrznych

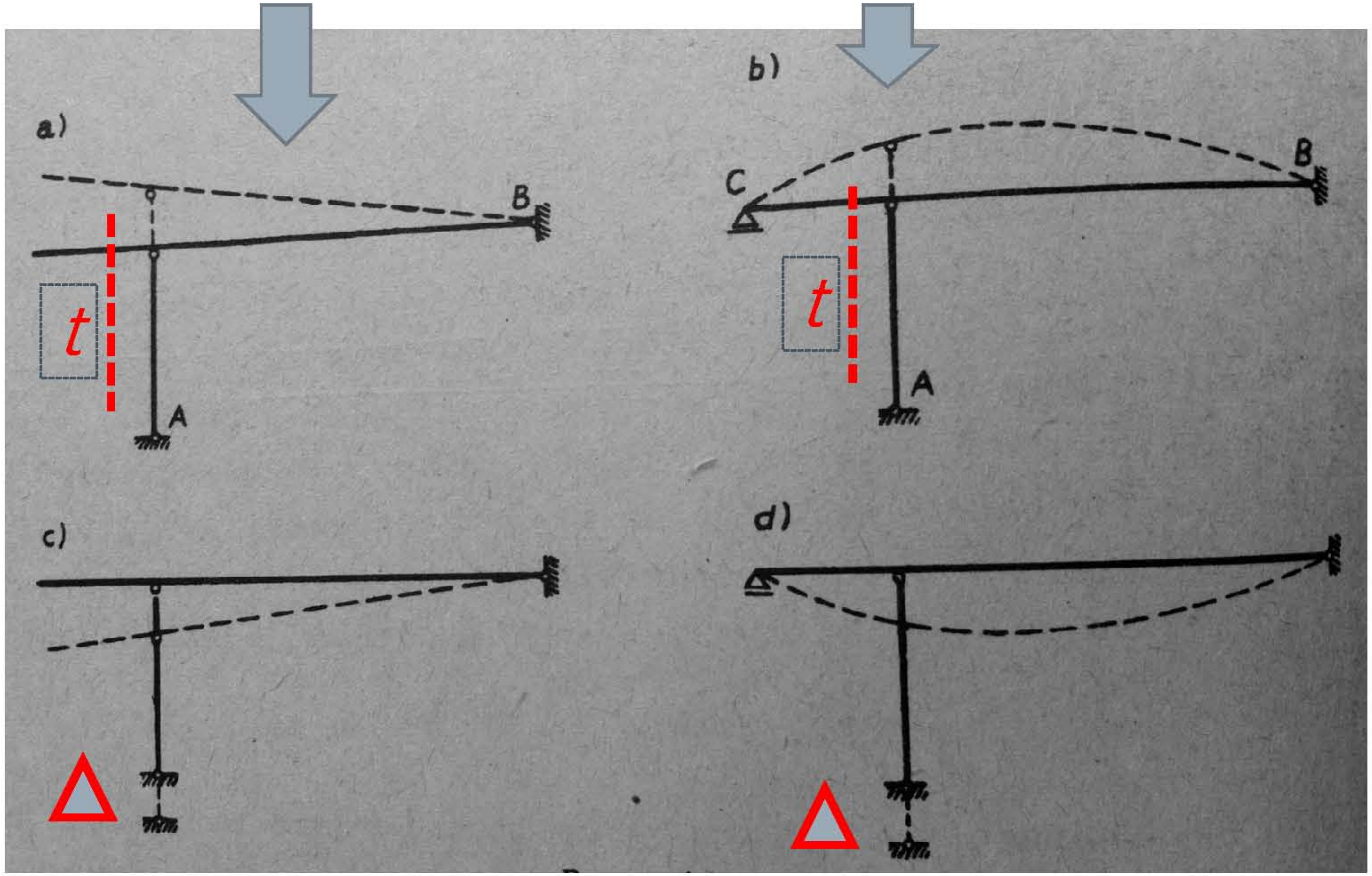
› W układzie statycznie **niewyznaczalnym** możliwe są stany samonaprężenia pod wpływem temperatury czy przemieszczenia podpór

› **UWAGA: Temperatura i przemieszczenie podpór w układach statycznie wyznaczalnych nie wywołują sił wewnętrznych ani reakcji podporowych!**

Układ statycznie wyznaczalny a niewyznaczalny

Dwie wersje ramy – wyznaczalna i niewyznaczalna

temperatura



osiadanie podpory

Podstawowe twierdzenia w mechanice budowli

Zasada pracy wirtualnej dla ciała sztywnego

Warunkiem **koniecznym** i **wystarczającym** równowagi ciała sztywnego jest by praca wszystkich obciążeń na dowolnych przemieszczeniach wirtualnych była równa zeru.

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} P_i \overline{\delta}_i = 0$$

Zastosowanie twierdzenia Castigliano do obliczania przemieszczeń

Można obliczyć **przemieszczenia** w układzie na podstawie pochodnej energii sprężystości.

Jeżeli energia naprężeń materiału liniowo-sprężystego jest wyrażana jako funkcja sił P_i, wtedy pochodna cząstkowa tej energii względem tych sił jest równa przemieszczeniom δ_i na kierunkach sił P_i w punktach ich zaczepienia.

$$\frac{\partial E_p}{\partial P_i} = \delta_i$$

Zastosowanie twierdzenia Castigliano do obliczania sił

Można obliczyć **siły** w układzie na podstawie pochodnej energii sprężystości.

Jeżeli energia sprężystości materiału liniowo-sprężystego może być wyrażona jako funkcja przemieszczeń δ_i *, wtedy pochodna cząstkowa tej energii względem przemieszczeń jest równa siłom* P_i *zaczepionym w punktach przemieszczeń.*

$$\frac{\partial E_p}{\partial \delta_i} = P_i$$

Zastosowanie twierdzenia Castigliano do obliczania sił

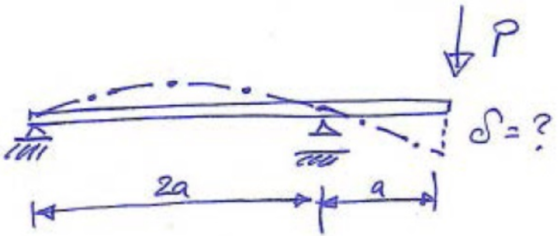
Energia potencjalna odkształcenia sprężystego = praca (rzeczywistych) sił wewnętrznych na odkształceniach.

$$2E_p = 2L_w = \int_l \frac{N^2}{EA} ds + \int_l \frac{M^2}{EI} ds + \int_l \kappa \frac{T^2}{GA} ds + \boxed{\int_l \frac{M_s{}^2}{GI_s} ds}$$

Obliczanie przemieszczeń w układach statycznie wyznaczalnych

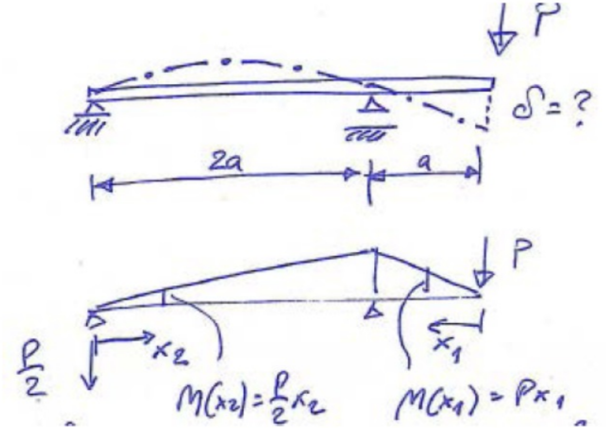
Obliczyć przemieszczenie z twierdzenia Castigliano

$$\frac{\partial E_p}{\partial P_i} = \delta_i$$



Z twierdzenia **Castigliano**:

obliczamy momenty zginające
i energię



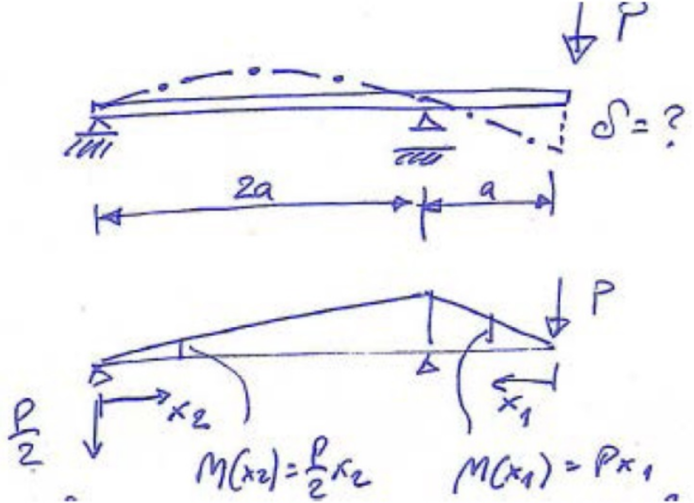
$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}\int \frac{M(x)^2}{EJ}\,dx} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2a}\left(\frac{P}{2}x_2\right)^2 dx_2 + \frac{1}{2}\int_0^{a}\left(Px_1\right)^2 dx_1 =$$

$$\frac{1}{8}P^2\int_0^{2a}\left(x_2\right)^2 dx_2 + \frac{1}{2}P^2\int_0^{a}\left(x_1\right)^2 dx_1 = \frac{1}{8}P^2\frac{1}{3}(2a)^3 + \frac{1}{2}P^2\frac{1}{3}(a)^3 = \frac{P^2a^3}{2}$$

Obliczamy pochodną energii względem obciążenia

$$\delta = \frac{\partial E_P}{\partial P} = \frac{\partial\left(\dfrac{P^2a^3}{2}\right)}{\partial P} = Pa^3$$



- Równowaga prac

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi jakiegokolwiek układu materialnego jest to, by suma prac wszystkich sił (zewnętrznych i wewnętrznych) działających na układ i pracujących na dowolnych przemieszczeniach tego układu była równa zero.

$$\delta L_Z + \delta L_W = 0$$

δL_Z – *przyrost pracy sił zewnętrznych*
δL_w – *przyrost pracy sił wewnętrznych*

$\delta L_Z = \sum_i \vec{P}_i \circ \overrightarrow{\delta r_i} = \sum_i P_i \ \delta r_i \ cos\alpha_i$ $\quad$ $\vec{P}_i$ – *siły zewnetrzne*
$\delta L_w = \sum_j \vec{F}_j \circ \overrightarrow{\delta r_j} = \sum_j F_j \ \delta r_i \ cos\beta_j$ $\quad$ $\vec{F}_i$ – *siły wewnętrzne*

*dowolne przemieszczenia nie muszą być przemieszczeniami rzeczywistymi czyli działającymi wzdłuż konkretnego toru ruchu, odbywającymi się w czasie i zależnymi od sił. Są to przemieszczenia uwolnione od czasu i sił, są jedynie zgodne z narzuconymi dla układu więzami stąd są nieskończenie małe.

*W układach NIEODKSZTAŁCALNYCH (doskonale sztywnych) odkształcenia są z założenia równe zeru stąd ubytek energii potencjalnej skumulowanej w ustroju jest równy zeru, a więc przyrost pracy sił wewnętrznych jest zerowy. Dla tych układów zasada prac przygotowanych przyjmuje formułę dobrze znana z Podstaw Statyki, która brzmi następująco:

Suma prac wirtualnych wszystkich sił zewnętrznych (czynnych i biernych) na wirtualnych przemieszczeniach zgodnych z kinematycznymi właściwościami układu w przypadku równowagi tych sił jest równa zeru.

$$\delta L_Z = 0$$

- Związki fizyczne (konstytutywne)

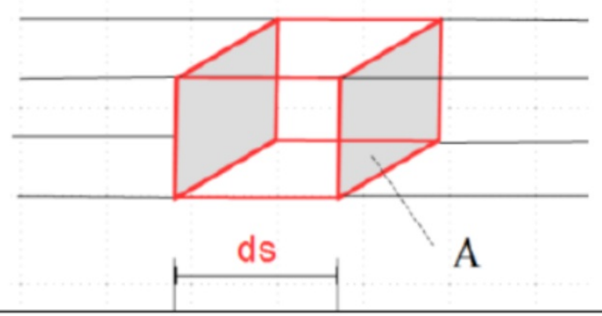
  Def.: Zależności jakie przyjmuje się między tensorami naprężeń a tensorami odkształceń nazywa się związkami fizycznymi.

*W płaskich układach prętowych rozróżnia się 3 składowe **stanu odkształcenia:**

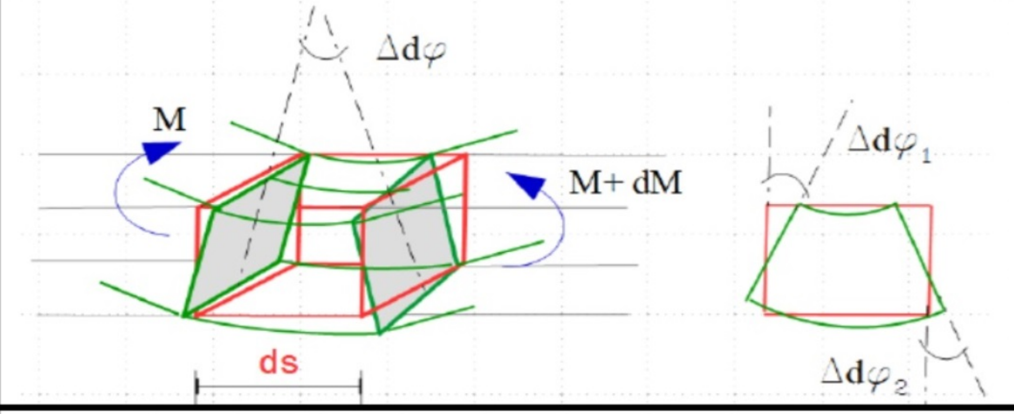
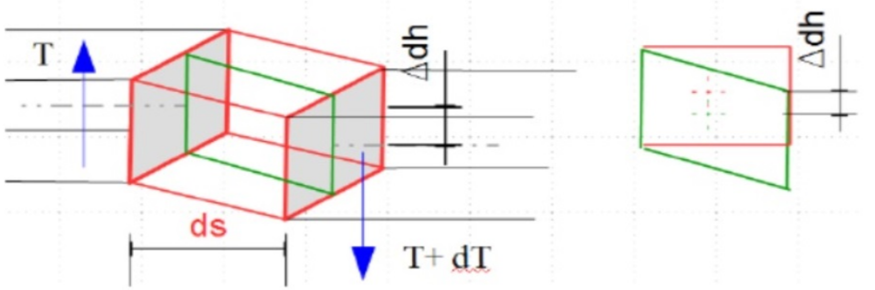
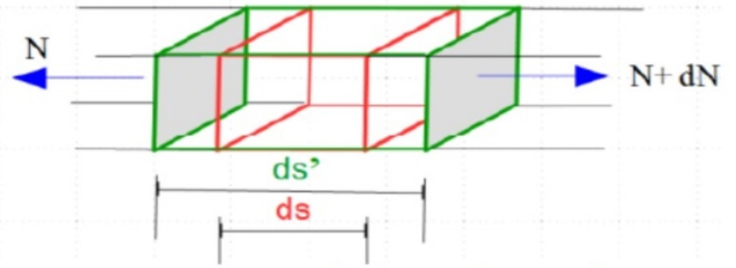
–odkształcenie kątowe $\Delta d\varphi$
–odkształcenie postaciowe Δdh
–odkształcenie podłużne Δds

Odkształcenia te składają się na jedno odkształcenie elementu, który po obciążeniu pozostaje w położeniu równowagi.

Rozpatrzmy nieskończenie mały element pręta o objętości $dV = A\,ds$
A – *pole przekroju,*
ds – *elmentarny odcinek pręta nieobciążonego*



W wyniku obciążenia w rozpatrywanym elemencie pręta powstają siły wewnętrzne i związane z nimi odkształcenia.

odkształcenie kątowe $\Delta d\varphi$		Zmiana kąta między przekrojami ograniczającymi element, związane jest ze zginaniem (M). $\Delta d\varphi = \Delta d\varphi 1 + \Delta d\varphi 2$
odkształcenie postaciowe Δdh		Wzajemne, równoległe, poprzeczne przesunięcie ścian ograniczających element, związane jest ze ścinaniem (T).
odkształcenie podłużne Δds	 $\Delta ds = ds' - ds$	Zmianie długości elementu , związane jest z rozciąganiem (N).

Ostatecznie w układach odkształcalnych liniowo sprężyście

związki fizyczne można zapisać jako:

$$\Delta d\varphi = -\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_x}{z} ds = \frac{\sigma_x}{E \cdot z} ds = \frac{M \cdot z}{I_y \, E \cdot z} ds = \frac{M}{EI_y} ds$$

$$\Delta dh = \gamma_{xz} \, ds = \frac{\tau_{xz}}{G} ds = \frac{\kappa \, T}{GA} ds$$

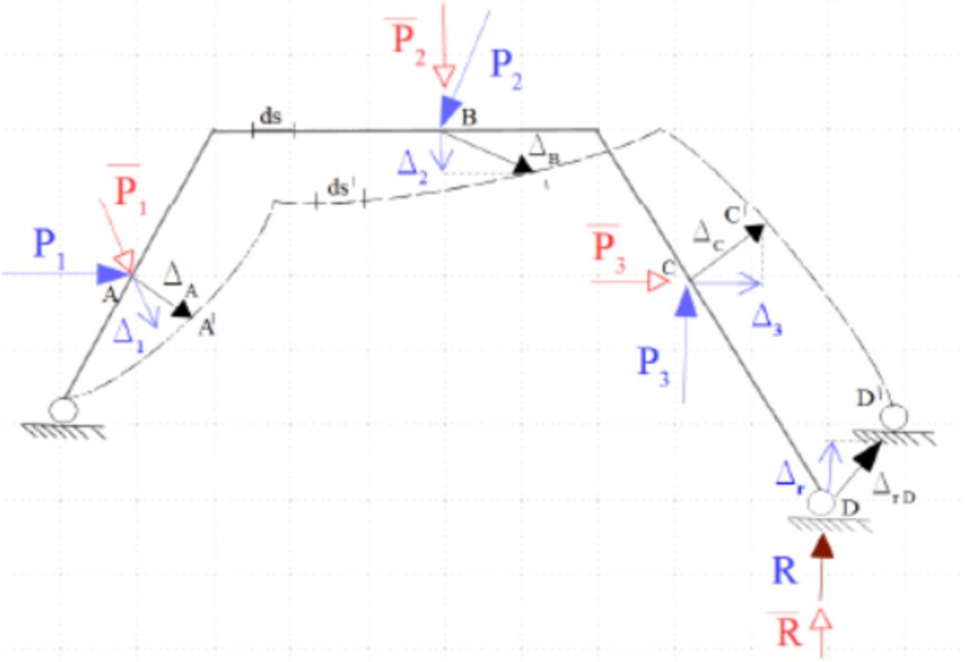
$$\Delta ds = \varepsilon_x \, ds = \frac{\sigma_x}{E} ds = \frac{N}{EA} ds$$

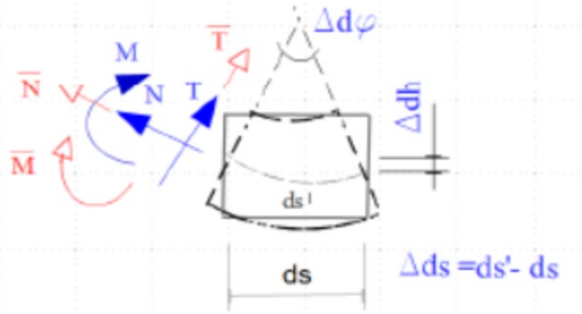
- W stanie rzeczywisty przemieszczeń i obciażeń
  - spełniony jest warunek statycznej dopuszczalności,
  - spełniony jest warunek kinematycznej dopuszczalności,
  - zależność naprężeń i odkształceń jest zgodna z założonym prawem fizycznym.
- W stanie wirtualnego obciążenia
  - spełniona musi być jedynie statyczna dopuszczalność stąd:
    * obciążenia są na tyle małe, że nie zmieniają aktualnego stanu konstrukcji,
    * obciążenia są niezależne od aktualnego stanu sił i przemieszczeń konstrukcji.
- W stanie wirtualnego przemieszczenia
  - spełniona musi być jedynie kinematyczna dopuszczalność stąd:
    * przemieszczenia są na tyle małe, że nie zmieniają aktualnego stanu konstrukcji,
    * przemieszczenia są niezależne od aktualnego stanu sił i przemieszczeń konstrukcji.

- Sformułowanie ZPP przy wirtualnym stanie obciążeń (II-sformułowanie ZPP)

- Rozważmy dowolny układ prętowy SW lub SN, w którym zadane obciążenie zewnętrzne spowoduje powstanie w każdym przekroju tego układu odpowiedniego stanu odkształceń i naprężeń zależnego od powstałych sił przekrojowych.
- Następnie na stan rzeczywisty nałóżmy stan wirtualnych obciążeń (układowi będącemu w równowadze nadaje się dodatkowe obciążenia, które są nieskończenie małe, dowolne, niezależne od istniejących sił i czasu, jedynie statycznie dopuszczalne):

- - - - stan równowagi układu





<u>Stan rzeczywisty określony przez :</u>
Przemieszczenia $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_{rD}$, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_r$ i
odkształcenia $\Delta d\varphi, \Delta dh, \Delta ds$
<u>Stan wirtualny określony przez</u>:
Obciążenie $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}$, reakcje $\bar{R}$, siły przekrojowe $\overline{M}, \ \overline{T}, \overline{N}.$

Def.: Praca wirtualnych sił zewnętrznych na odpowiadających im rzeczywistych przemieszczeniach jest równa pracy wirtualnych sił wewnętrznych na odpowiadających im rzeczywistych odkształceniach.

$$\sum_{n} \overline{P}_n \; \Delta_n + \sum_{m} \overline{R}_m \; \Delta_{r_m} = \int \overline{M} \Delta d\varphi + \int \overline{T} \, \Delta dh + \int \overline{N} \, \Delta ds$$

II sformułowanie zasady prac przygotowanych można zastosować do wyznaczenia przemieszczeń.