

# Mechanika budowli

Izabela Lubowiecka

Katedra Mechaniki Budowli WILiŚ

Konsultacje, pok. 467A GG

# Obliczanie przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych. Twierdzenie redukcyjne

## WYPROWADZENIE TWIERDZENIA REDUKCYJNEGO DLA UKŁADÓW Z OBCIĄŻENIEM CZYNNYM

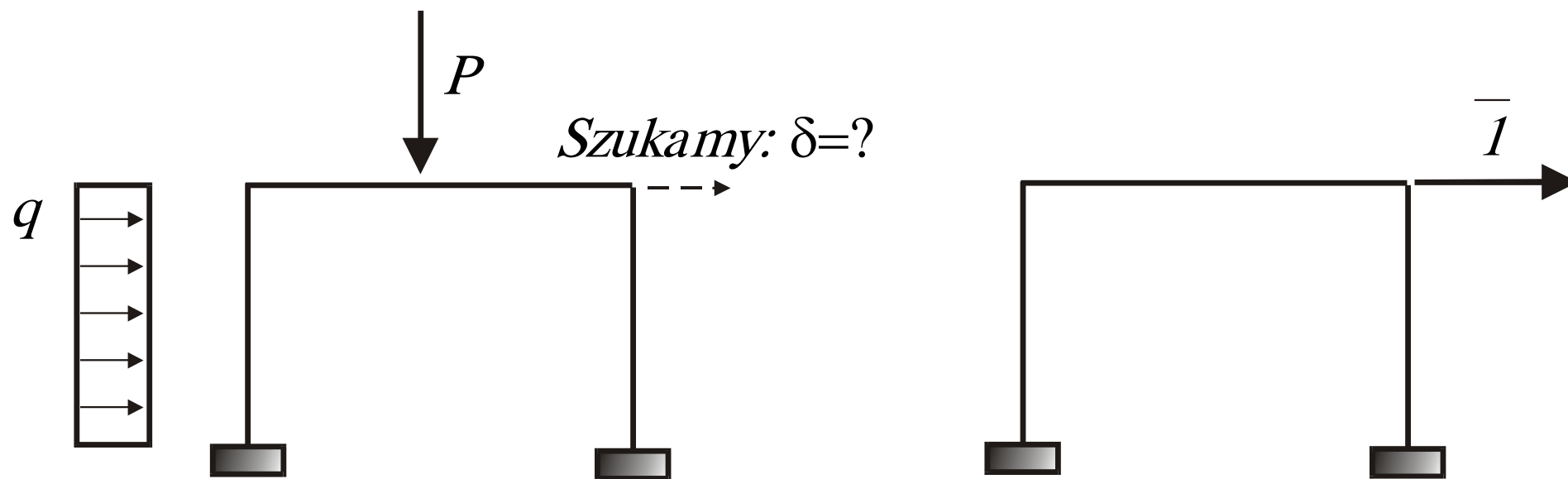
Do wyznaczania przemieszczeń w konstrukcjach możemy zastosować wzór Maxwella-Mohra. Obliczanie przemieszczeń polega na:

- › rozwiązaniu danego układu (może to być dowolny układ statycznie niewyznaczalny lub statycznie wyznaczalny) od obciążenia zewnętrznego,
- › rozwiązaniu danego układu od obciążenia jednostkowego – wirtualnego w kierunku szukanego przemieszczenia,
- › całkowania wykresów wg poniższego wzoru (tylko wpływ momentów zginających!):

$$\delta = \int \frac{M \times \bar{M}}{EJ}$$

# Twierdzenie redukcyjne

Jeżeli układ jest statycznie niewyznaczalny to stosowanie wzoru Maxwella – Mohra wymaga rozwiązania zadania niewyznaczalnego dwa razy:



$$\delta = \int \frac{M \times \bar{M}}{EJ}$$

## Twierdzenie redukcyjne

Twierdzenie redukcyjne pozwala na uproszczenie obliczeń.

W liczniku funkcji podcałkowej wzoru Maxwella-Mohra można rozpisać każdy moment zginający zgodnie z procedurą metody sił.

Zależności na momenty zginające w danym układzie od obciążenia zewnętrznego  $M$  i momenty zginające w tym układzie od obciążenia wirtualnego  $\bar{M}$ .

$$\delta = \int \frac{M \times \bar{M}}{EJ} = \int \frac{(M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3) \times (\bar{M}_0 + \bar{M}_1 \bar{X}_1 + \bar{M}_2 \bar{X}_2 + \bar{M}_3 \bar{X}_3)}{EJ} ds$$

## Twierdzenie redukcyjne

$$\delta = \int \frac{M \times \bar{M}}{EJ} =$$

$$M = (M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3)$$

$$\bar{M} = (\bar{M}_0 + \bar{M}_1 \bar{X}_1 + \bar{M}_2 \bar{X}_2 + \bar{M}_3 \bar{X}_3)$$

$$\int \frac{M \times (\bar{M}_0 + \bar{M}_1 \bar{X}_1 + \bar{M}_2 \bar{X}_2 + \bar{M}_3 \bar{X}_3)}{EJ} ds$$

## Twierdzenie redukcyjne

Po wymnożeniu składników występujących w liczniku powyższej zależności otrzymamy (licznik):

*licznik =*

$$M\bar{M}_0 +$$

$$M_0\bar{M}_1\bar{X}_1 + M_1X_1\bar{M}_1\bar{X}_1 + M_2X_2\bar{M}_1\bar{X}_1 + M_3X_3\bar{M}_1\bar{X}_1 +$$

$$M_0\bar{M}_2\bar{X}_2 + M_1X_1\bar{M}_2\bar{X}_2 + M_2X_2\bar{M}_2\bar{X}_2 + M_3X_3\bar{M}_2\bar{X}_2 +$$

$$M_0\bar{M}_3\bar{X}_3 + M_1X_1\bar{M}_3\bar{X}_3 + M_2X_2\bar{M}_3\bar{X}_3 + M_3X_3\bar{M}_3\bar{X}_3$$

# Twierdzenie redukcyjne

*licznik* =

$M\bar{M}_0 +$

$M_0\bar{M}_1\bar{X}_1 + M_1X_1\bar{M}_1\bar{X}_1 + M_2X_2\bar{M}_1\bar{X}_1 + M_3X_3\bar{M}_1\bar{X}_1 +$

$M_0\bar{M}_2\bar{X}_2 + M_1X_1\bar{M}_2\bar{X}_2 + M_2X_2\bar{M}_2\bar{X}_2 + M_3X_3\bar{M}_2\bar{X}_2 +$

$M_0\bar{M}_3\bar{X}_3 + M_1X_1\bar{M}_3\bar{X}_3 + M_2X_2\bar{M}_3\bar{X}_3 + M_3X_3\bar{M}_3\bar{X}_3$

Po wyciągnięciu za nawias nadliczbowych układu z obciążeniem wirtualnym mamy:

*licznik* =

$M\bar{M}_0 +$

$(M_0\bar{M}_1 + M_1X_1\bar{M}_1 + M_2X_2\bar{M}_1 + M_3X_3\bar{M}_1)\bar{X}_1 +$

$(M_0\bar{M}_2 + M_1X_1\bar{M}_2 + M_2X_2\bar{M}_2 + M_3X_3\bar{M}_2)\bar{X}_2 +$

$(M_0\bar{M}_3 + M_1X_1\bar{M}_3 + M_2X_2\bar{M}_3 + M_3X_3\bar{M}_3)\bar{X}_3$

# Twierdzenie redukcyjne

*licznik* =

$$MM_0 +$$

$$(M_0\bar{M}_1 + M_1X_1\bar{M}_1 + M_2X_2\bar{M}_1 + M_3X_3\bar{M}_1)\bar{X}_1 +$$

$$(M_0\bar{M}_2 + M_1X_1\bar{M}_2 + M_2X_2\bar{M}_2 + M_3X_3\bar{M}_2)\bar{X}_2 +$$

$$(M_0\bar{M}_3 + M_1X_1\bar{M}_3 + M_2X_2\bar{M}_3 + M_3X_3\bar{M}_3)\bar{X}_3$$

Zarówno w rozwiązaniu układu od obciążenia zewnętrznego jak i wirtualnego możemy zastosować taki sam układ podstawowy a więc licznik powyższej zależności możemy przekształcić wprowadzając definicje przemieszczeń znane z rozwiązywania układów za pomocą metody sił:

*licznik* =

$$MM_0 +$$

$$(\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3)\bar{X}_1 +$$

$$(\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3)\bar{X}_2 +$$

$$(\delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3)\bar{X}_3$$



# Twierdzenie redukcyjne

*licznik* =

$MM_0 +$

$$\begin{aligned} & (\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3)\bar{X}_1 + \\ & (\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3)\bar{X}_2 + \\ & (\delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3)\bar{X}_3 \end{aligned}$$

Wykorzystując zależności opisujące zgodności przemieszczeń w kierunkach wprowadzonych w układzie podstawowym nadliczbowych:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0$$

$$\delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

# Twierdzenie redukcyjne

$$\text{licznik} = M\bar{M}_0$$

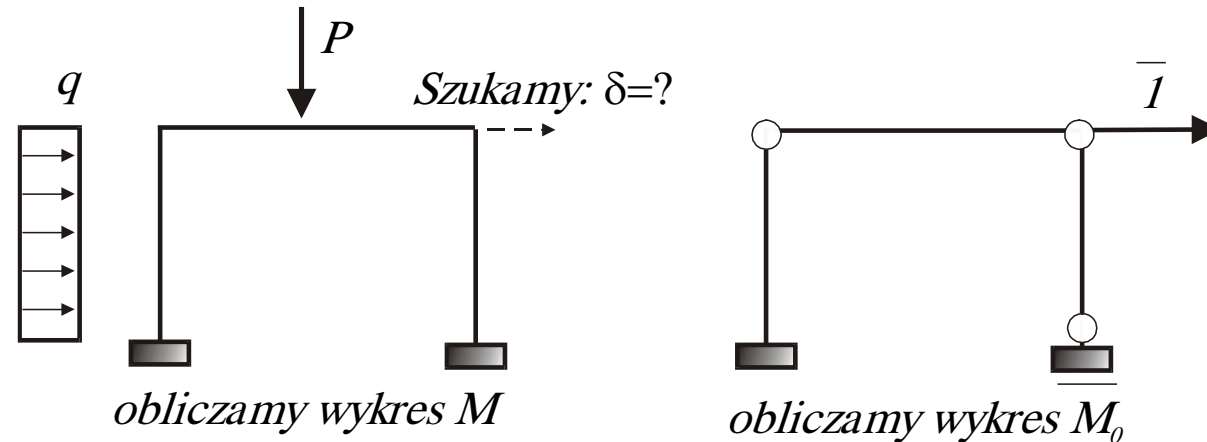
Uwzględniając powyższą zależność można sformułować

## Twierdzenie redukcyjne

$$\delta = \int \frac{M \times \bar{M}}{EJ} ds = \int \frac{M \times \bar{M}_0}{EJ} ds = \int \frac{M_0 \times \bar{M}}{EJ} ds$$

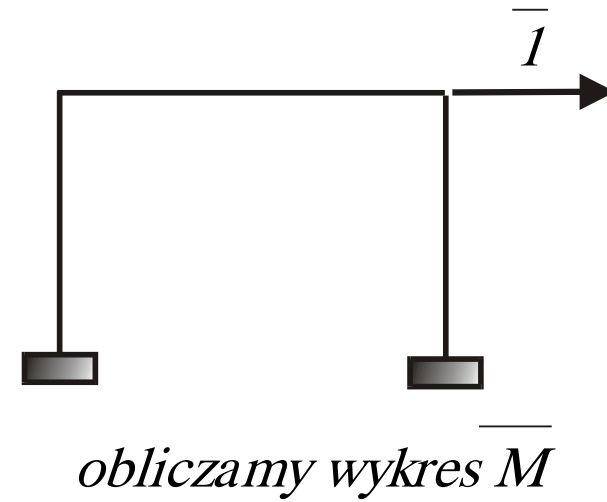
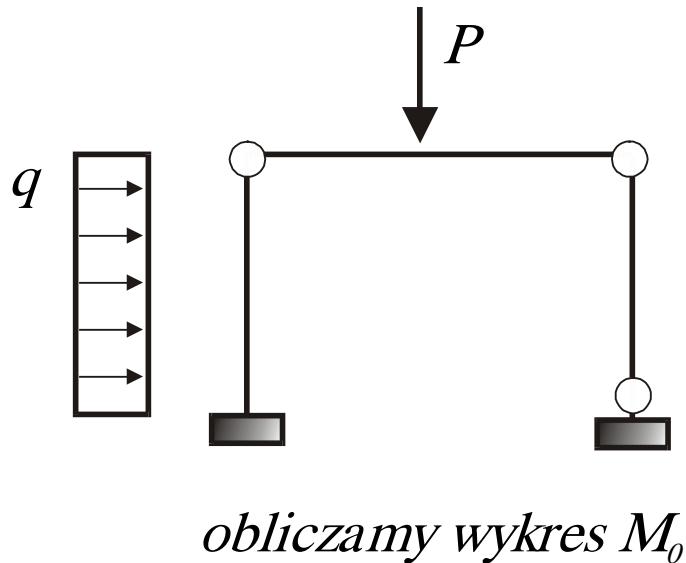
Twierdzenie redukcyjne pozwala na uproszczenie sposobu obliczania przemieszczeń w układzie statycznie niewyznaczalnym na podstawie wzoru Maxwella Mohra. Możemy jeden z wykresów momentów zginających występujących we wzorze Maxwella Mohra wyznaczyć w dowolnym układzie podstawowym metody sił. W powyższej zależności indeks „0” oznacza, że dany moment zginający został wyznaczony w układzie podstawowym metody sił.

I twierdzenie redukcyjne: **siłę wirtualną** przykładamy w UPMS:



$$\delta = \int \frac{M \times \bar{M}}{EJ} ds = \int \frac{M \times \bar{M}_0}{EJ} ds = \int \frac{M_0 \times \bar{M}}{EJ} ds$$

II twierdzenie redukcyjne: **obciążenie zewnętrzne** przykładamy w UPMS:



## TWIERDZENIE REDUKCYJNE W UKŁADACH OBCIĄŻONYCH TERMICZNIE LUB PRZEMIESZCZENIAMI PODPÓR

### Układy obciążone termicznie (tw. redukcyjne pierwsze)

Gdy obciążenie wirtualne przyłożymy do układu podstawowego to przemieszczenia wyznaczymy wg wzoru:

$$\delta = \int \bar{M}_0 \frac{\alpha \Delta t}{h} ds + \int \bar{N}_0 \alpha t_0 ds + \int \left( \frac{\bar{M}_0 M_t}{EJ} + \frac{\bar{N}_0 N_t}{EA} \right) ds$$

Ponieważ obciążenie termiczne działa w układzie statycznie **niewyznaczalnym**, powstają siły wewnętrzne  $M_t$  i  $N_t$  wywołane działaniem temperatury.

# Twierdzenie redukcyjne (drugie)

## Układy obciążone termicznie

Jeżeli obciążenie wirtualne przyłożymy do układu statycznie niewyznaczalnego a obciążenia termiczne do układu podstawowego to twierdzenie redukcyjne przyjmie postać:

$$\delta = \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds + \int \bar{N} \alpha t_0 ds$$

W tym przypadku nie występują składniki  $M_{0t}$  i  $N_{0t}$  gdyż w układzie statycznie wyznaczalnym obciążenie termiczne nie wywołuje sił wewnętrznych (układ ma swobodę odkształceń).

## Twierdzenie redukcyjne (pierwsze)

Układy obciążone przemieszczeniami podpór.

W przypadku gdy obciążenie wirtualne przyłożymy do układu podstawowego to przemieszczenia układu obciążonego osiadaniem podpór wyznaczymy wg wzoru:

$$\delta = -\sum_{i=1}^n \bar{R}_0 \Delta + \int \left( \frac{\bar{M}_0 M_{\Delta}}{EJ} + \frac{\bar{N}_0 N_{\Delta}}{EA} \right) ds$$

W układzie statycznie niewyznaczalnym pod wpływem osiadania podpór występują siły wewnętrzne.

# Twierdzenie redukcyjne (drugie)

## Układy obciążone przemieszczeniami podpór

Jeżeli obciążenie wirtualne przyłożymy do układu statycznie niewyznaczalnego a obciążenia przemieszczeniem podpór do układu podstawowego to twierdzenie redukcyjne przyjmie postać:

$$\delta = -\sum_{i=1}^n \bar{R} \Delta$$

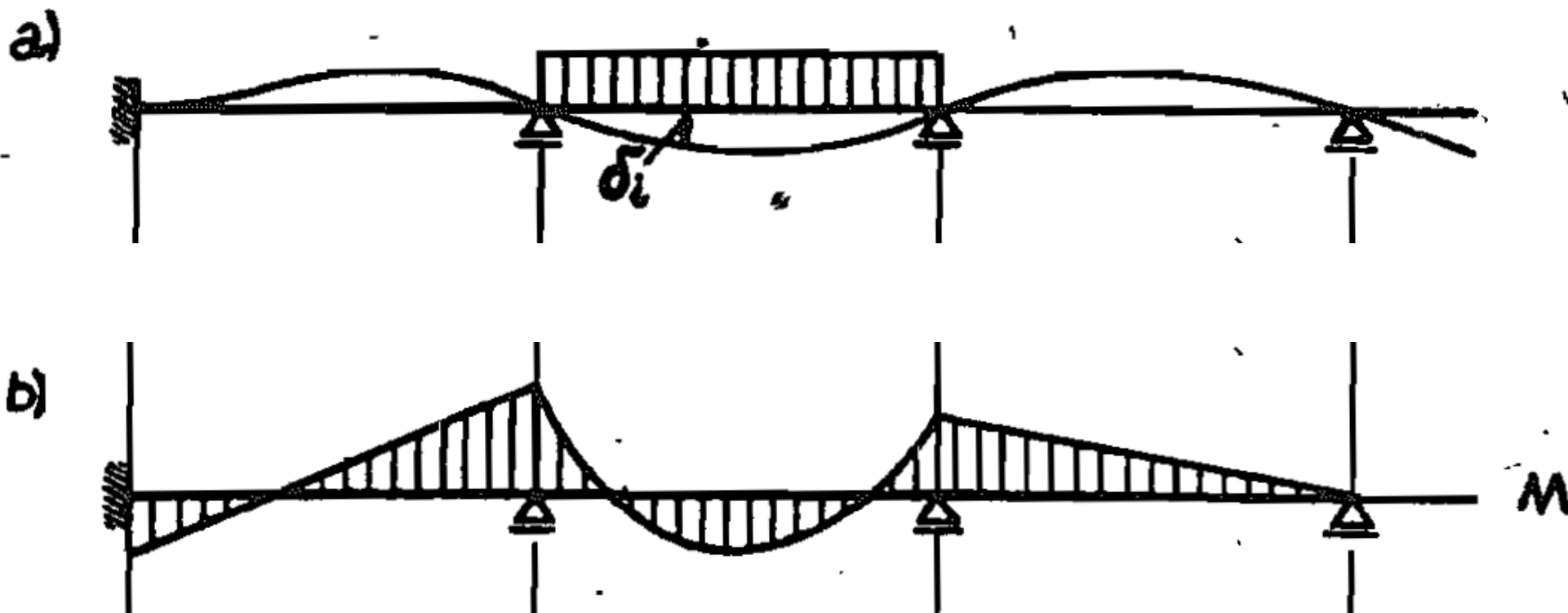
Wynika to stąd, że w układzie podstawowym obciążonym wymuszeniami kinematycznymi - przemieszczeniami podpór nie powstają siły wewnętrzne:  $M_{0\Delta}, N_{0\Delta}$ .



## Twierdzenie redukcyjne

Przykład – I twierdzenie redukcyjne

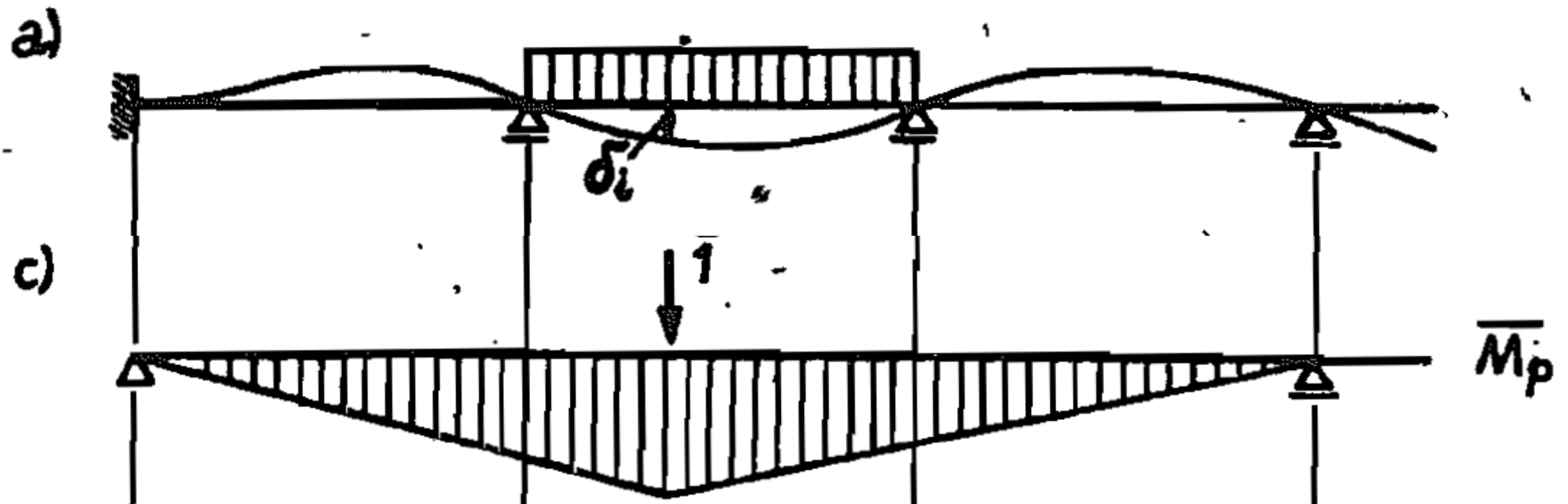
Wyznaczymy wykres momentów zginających od obciążenia zewnętrznego w układzie niewyznaczalnym



## Twierdzenie redukcyjne

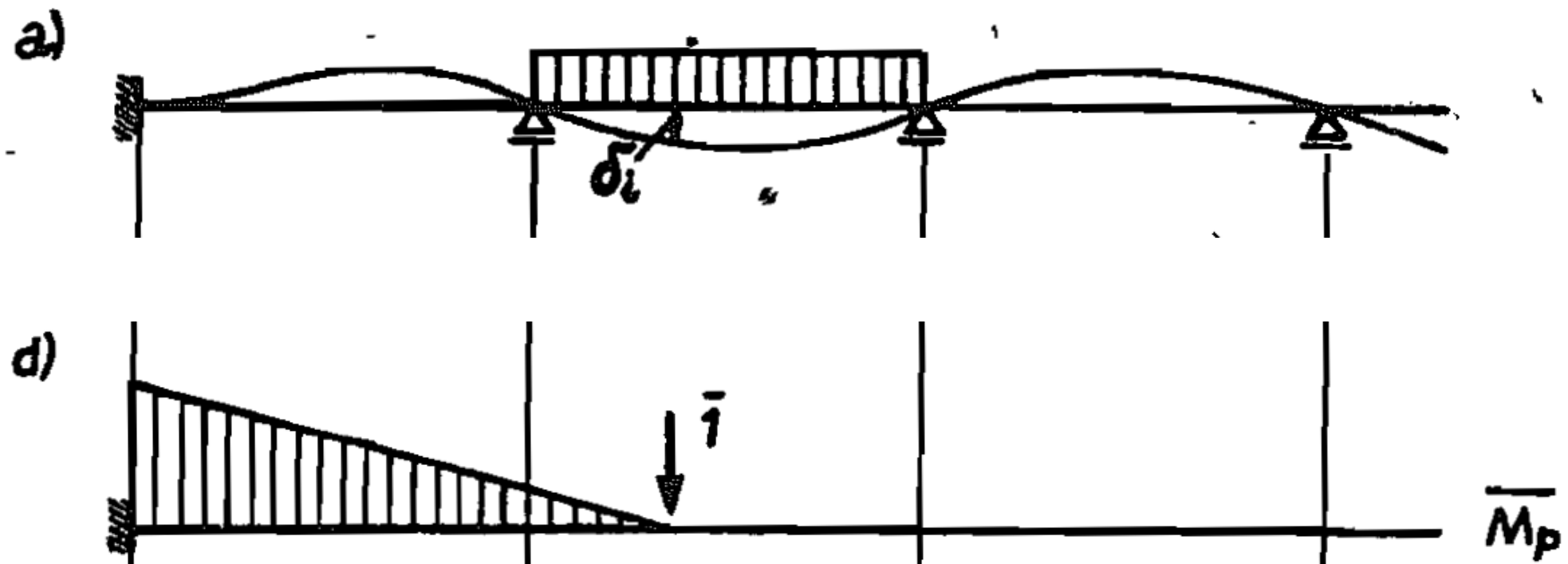
Jednostkową siłę wirtualną możemy zaczepić w różnych układach statycznie wyznaczalnych, np.

1) W układzie belki swobodnie podpartej



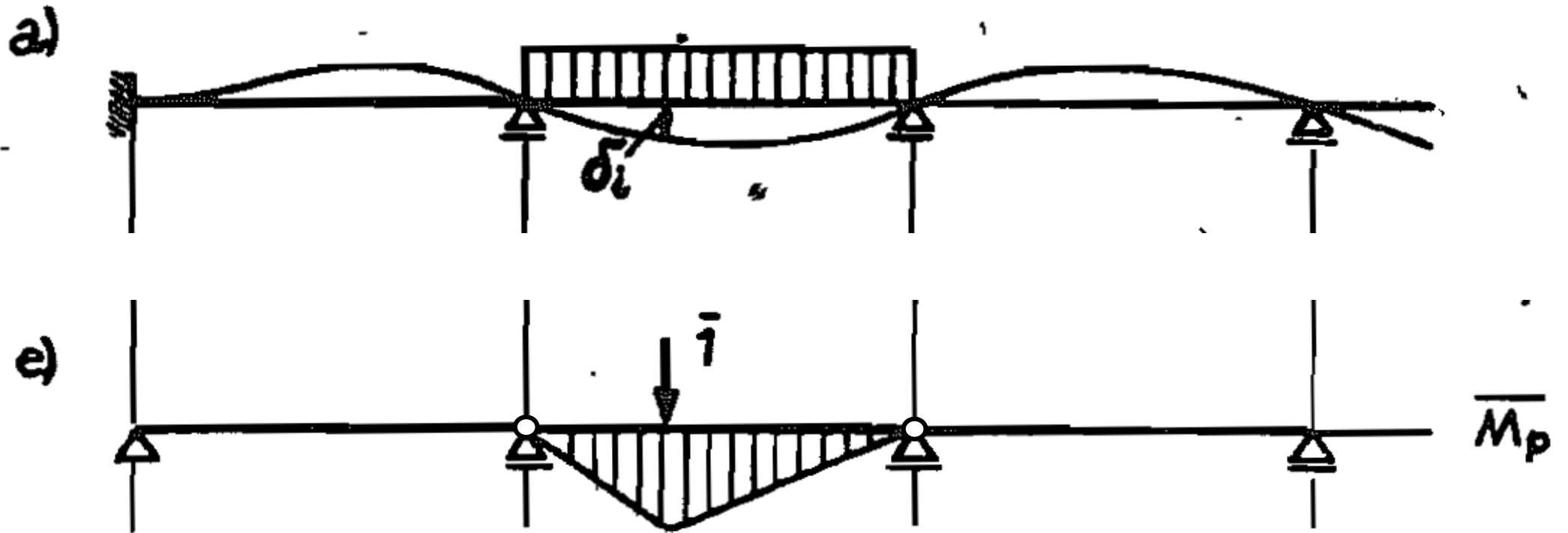
## Twierdzenie redukcyjne

Jednostkową siłę wirtualną możemy zaczepić  
2) W układzie wspornika



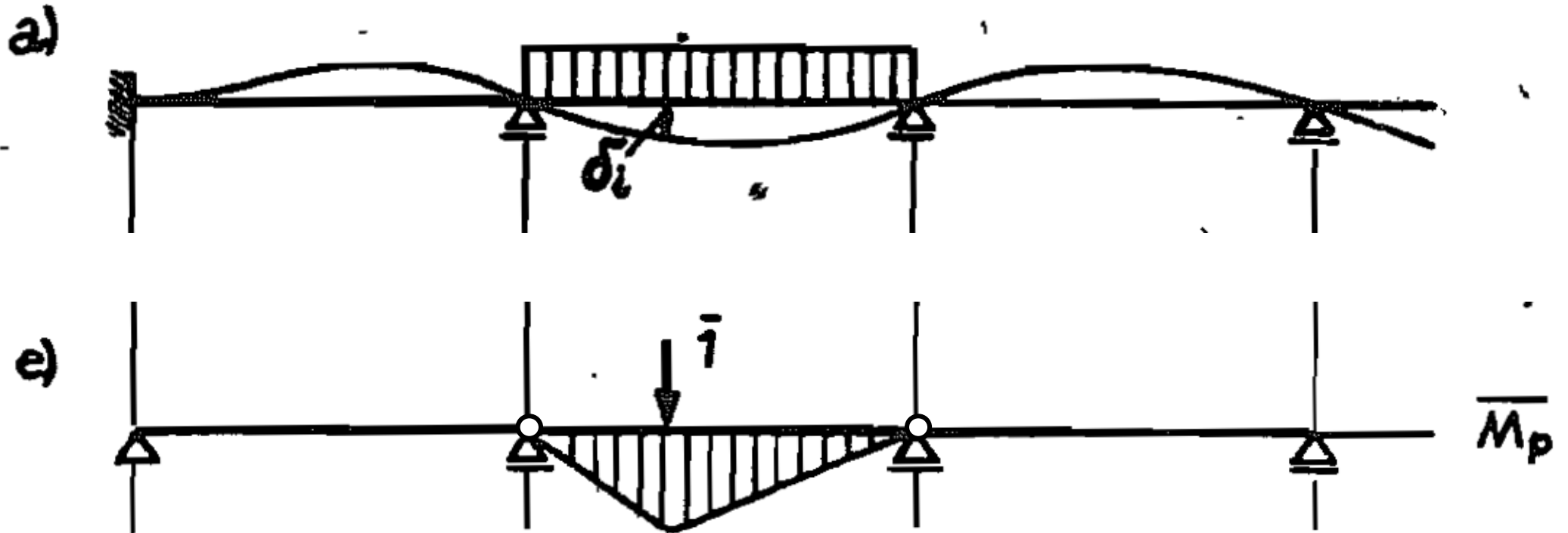
## Twierdzenie redukcyjne

Jednostkową siłę wirtualną możemy zaczepić  
3) W układzie belki przegubowej



## Twierdzenie redukcyjne

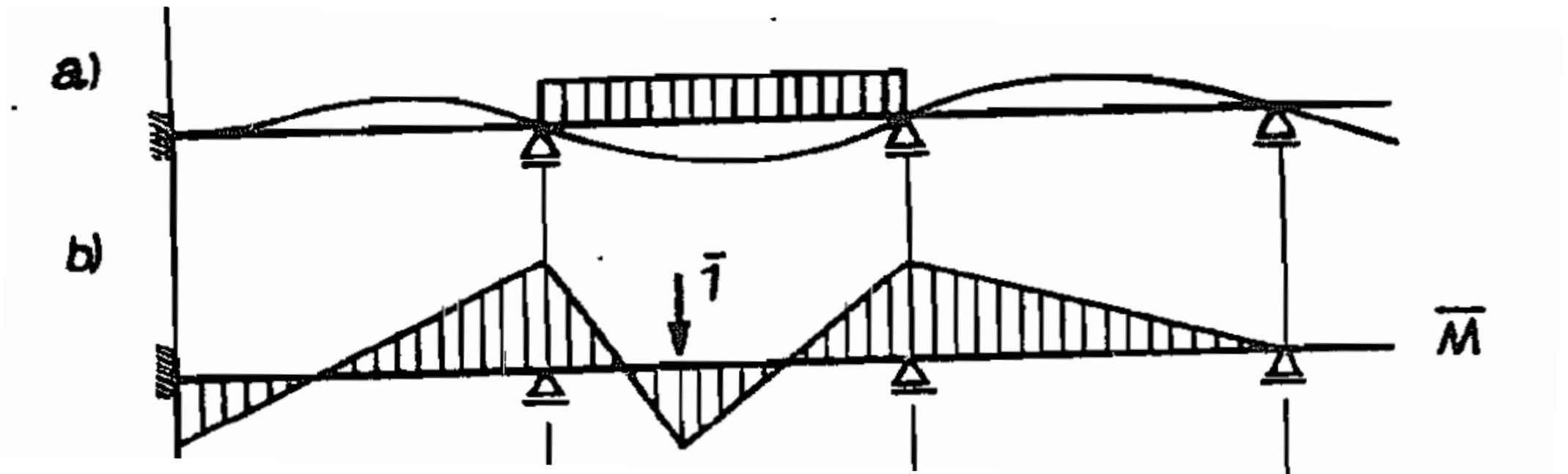
Odpowiedni dobór układu ułatwia zadanie  
W tym przypadku najlepszy będzie schemat poniżej  
(dlaczego?)



## Twierdzenie redukcyjne

Przykład – II twierdzenie redukcyjne

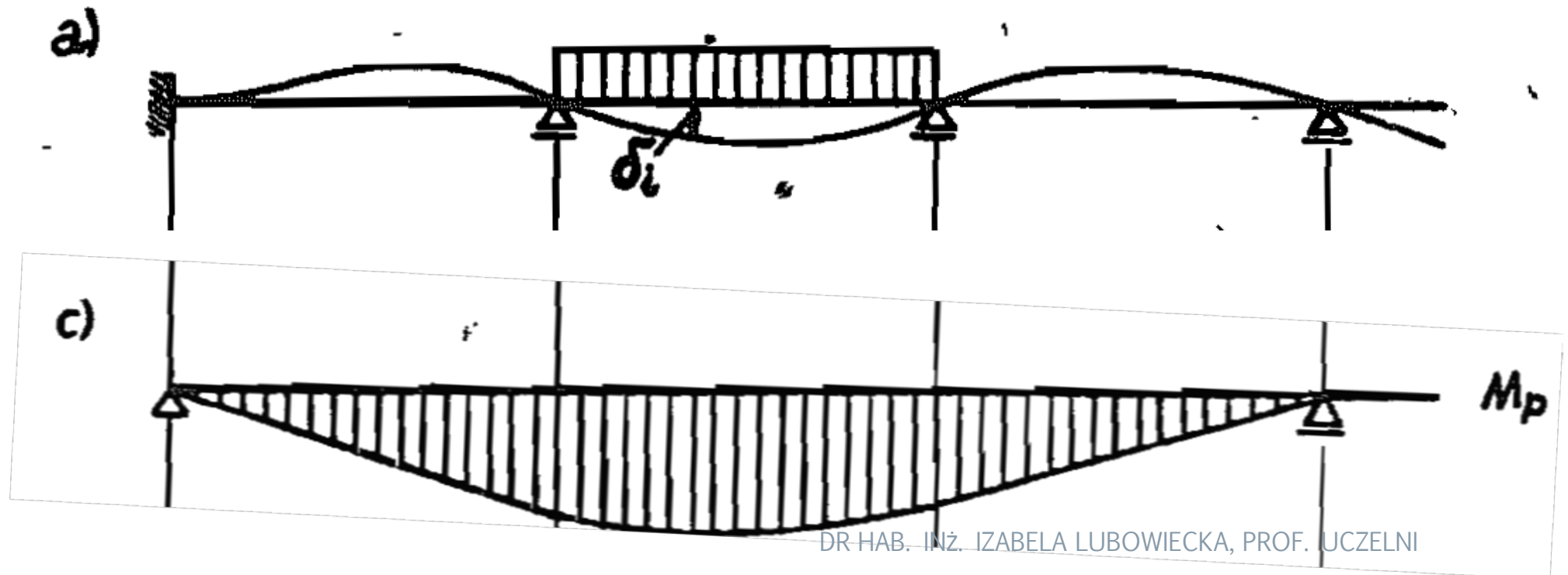
Wyznaczymy wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego w układzie niewyznaczalnym



## Twierdzenie redukcyjne

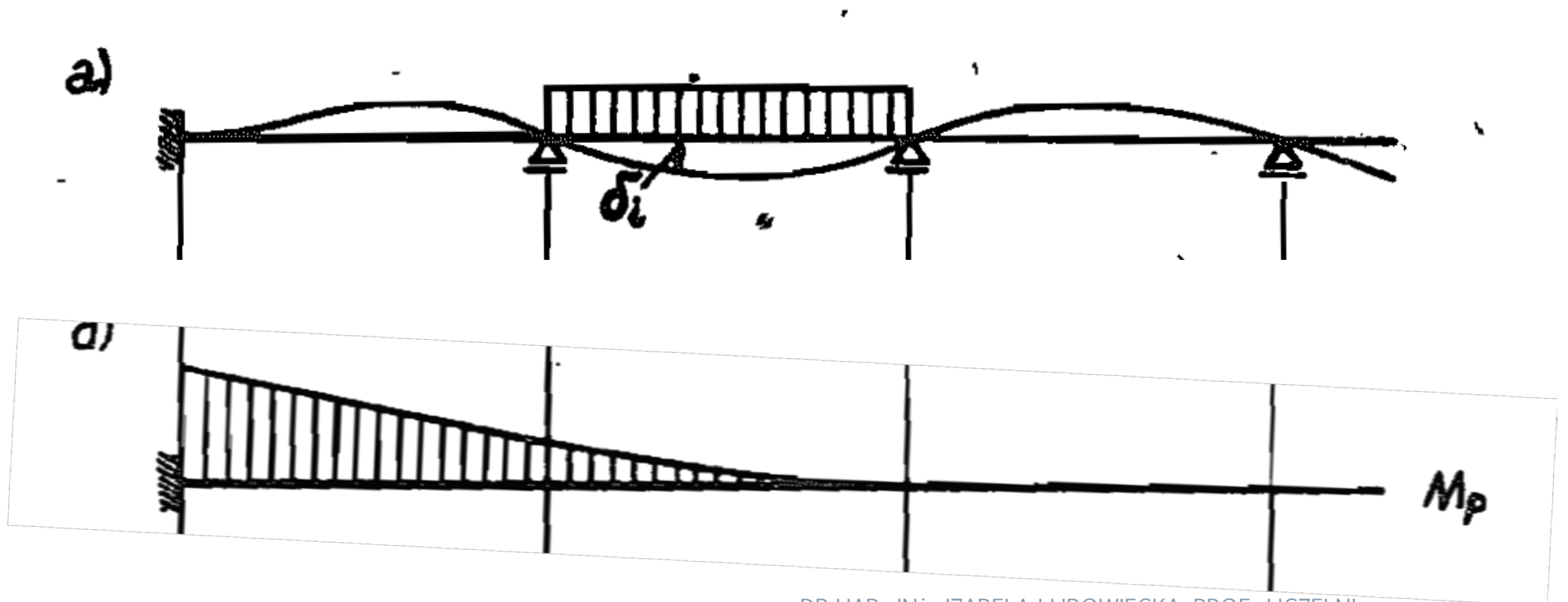
Jednostkową siłę wirtualną możemy zaczepić w różnych układach statycznie wyznaczalnych, np.

1) W układzie belki swobodnie podpartej



## Twierdzenie redukcyjne

Jednostkową siłę wirtualną możemy zaczepić  
2) W układzie wspornika

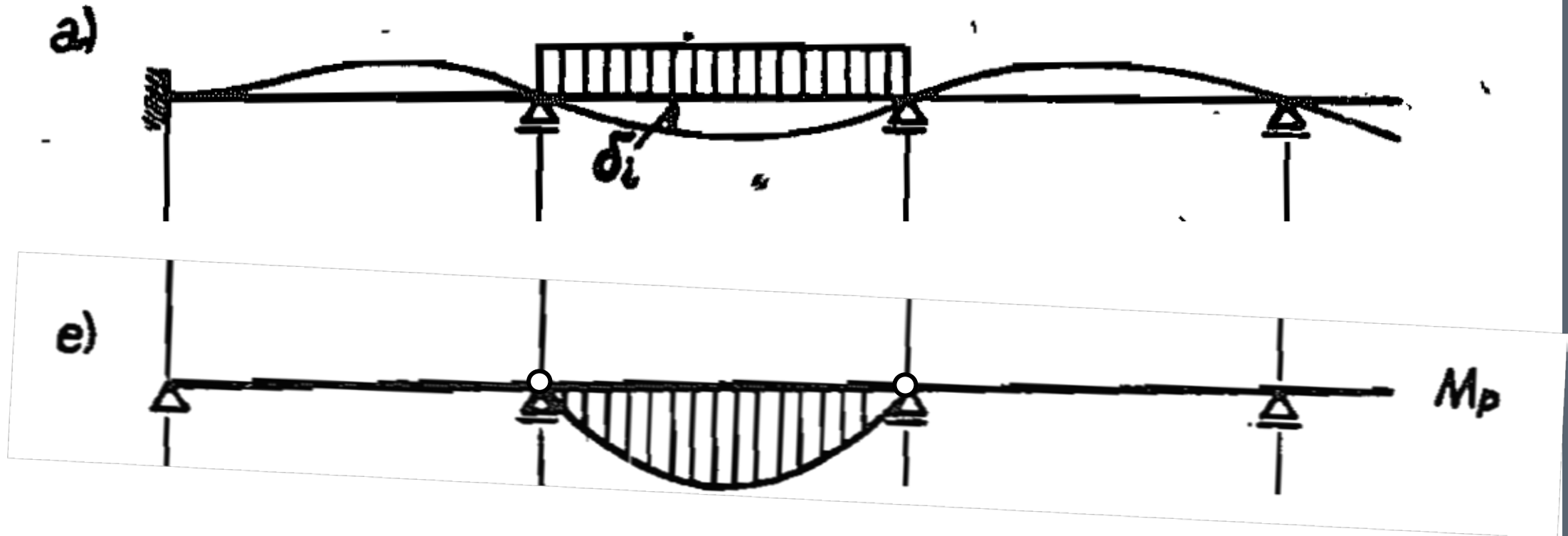




## Twierdzenie redukcyjne

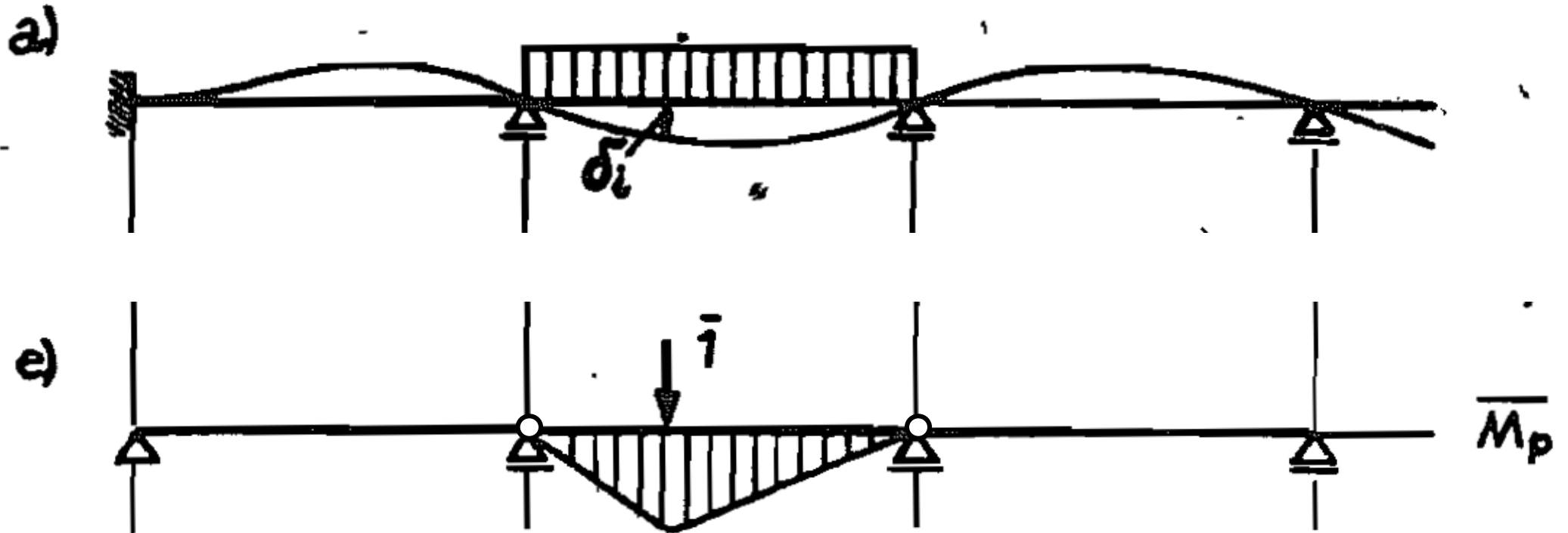
Jednostkową siłę wirtualną możemy zaczepić

3) W układzie belki przegubowej



## Twierdzenie redukcyjne

Odpowiedni dobór układu ułatwia zadanie  
W tym przypadku najlepszy będzie schemat poniżej  
(dlaczego?)



## Twierdzenie redukcyjne

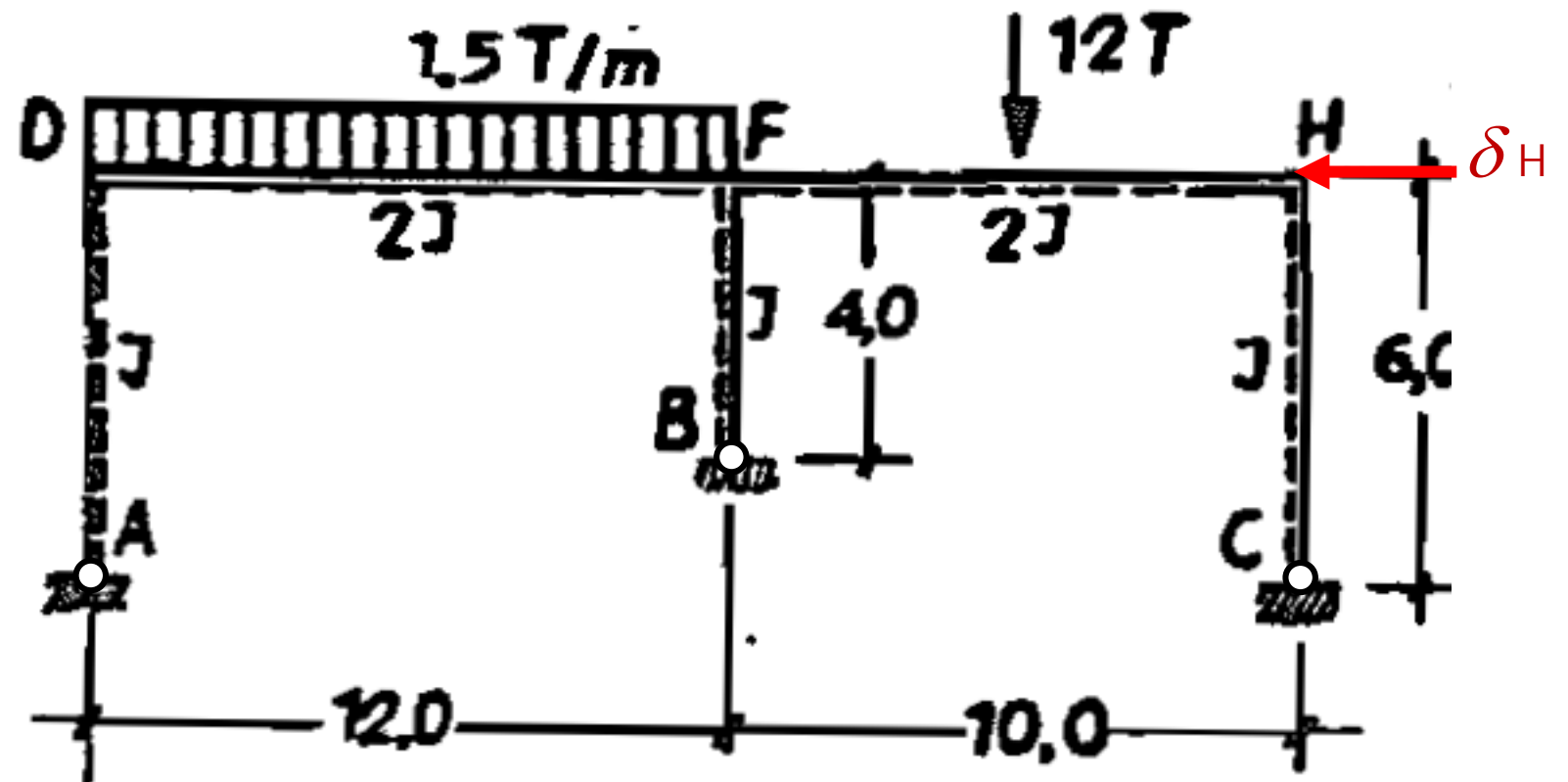
Niezależnie od tego na podstawie którego układu podstawowego obliczamy momenty  $\bar{M}$  otrzymamy taki sam wynik.

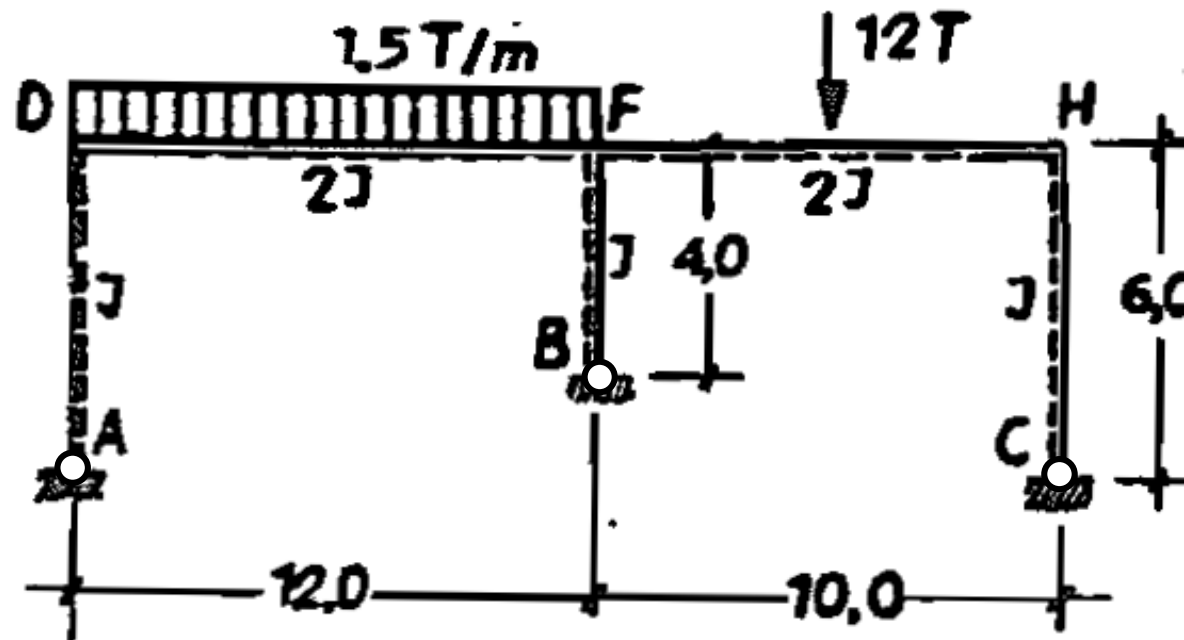
Rozbieżność wyników świadczyłaby o błędach w wykresie  $\bar{M}$ .

Z uwagi na to, że w projektowaniu zazwyczaj potrzebne nam są wykresy momentów  $M$  niezależnie od tego czy musimy obliczać przemieszczenia, zatem zazwyczaj wykorzystujemy **I twierdzenie redukcyjne**.

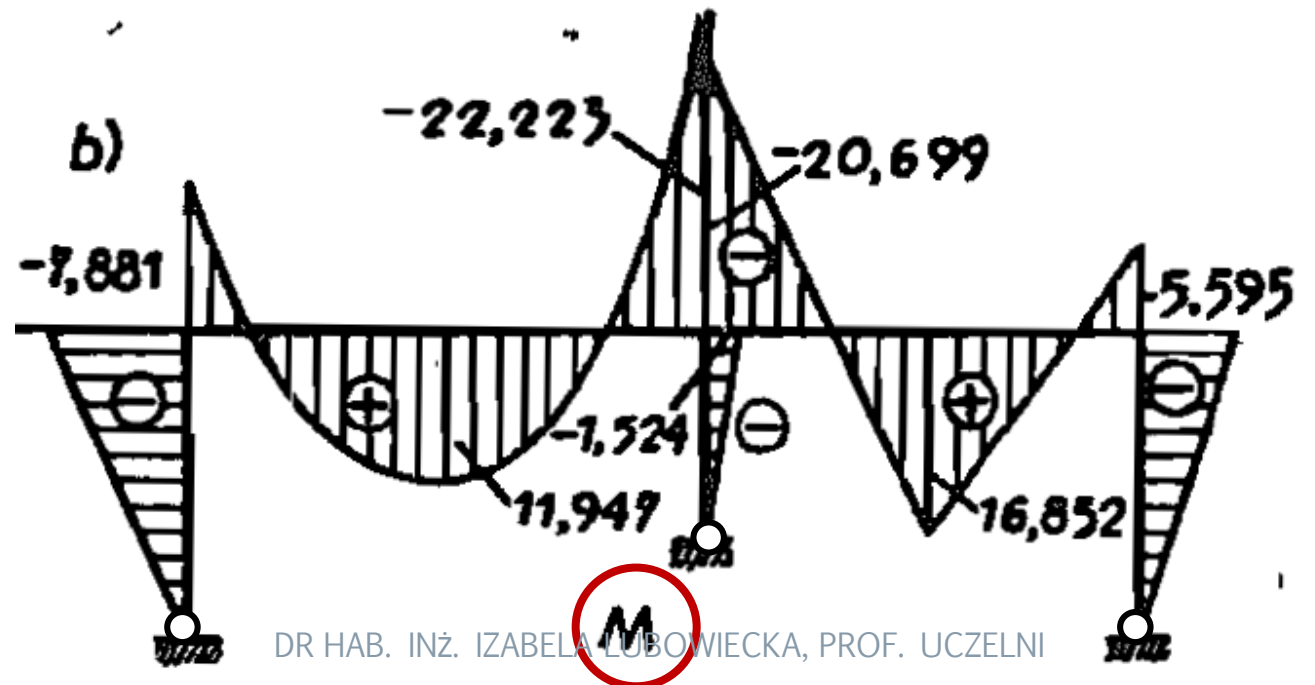
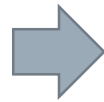
## Przykłady obliczeń – obciążenie czynne

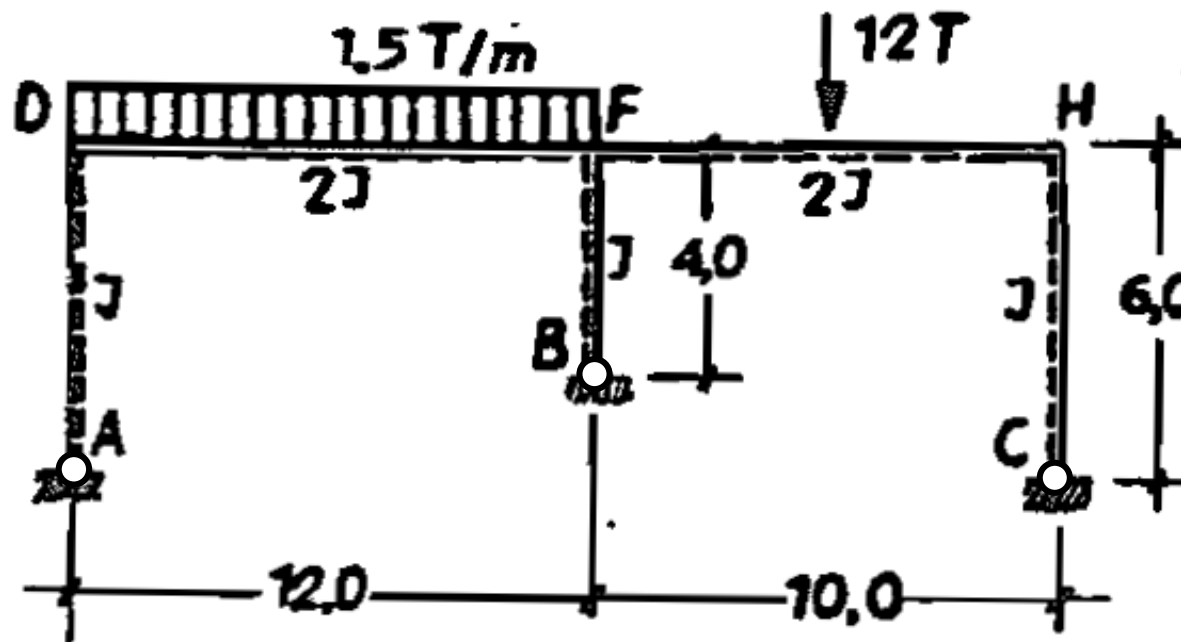
› Obliczyć przemieszczenie  $\delta_H$





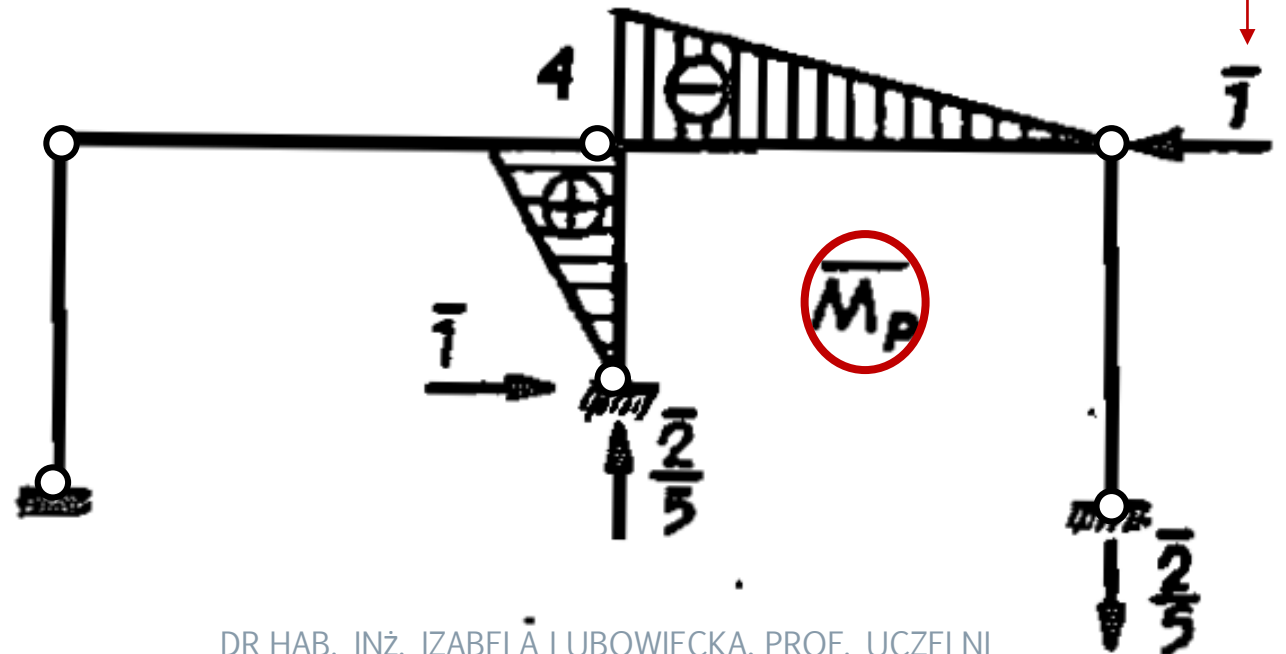
Rozwiązanie układu niewyznaczalnego od obciążeń zewnętrznych  $M$

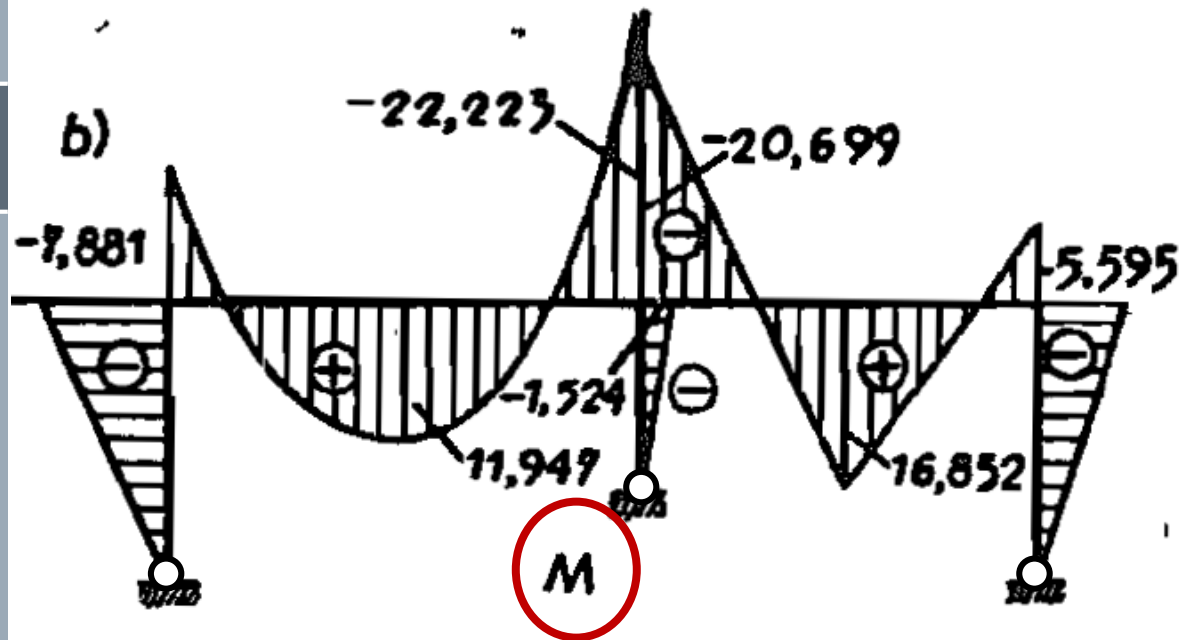




c)

› Układ podstawowy





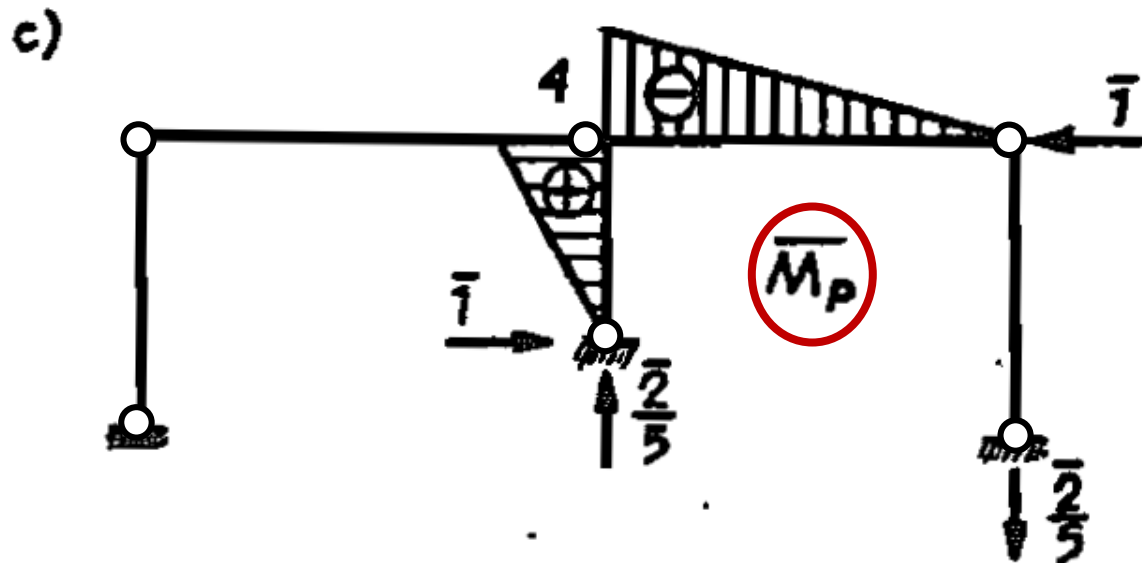
$$\delta_H = \int_s \frac{M_P M}{EJ} ds = 1,47 \frac{1}{EJ}$$



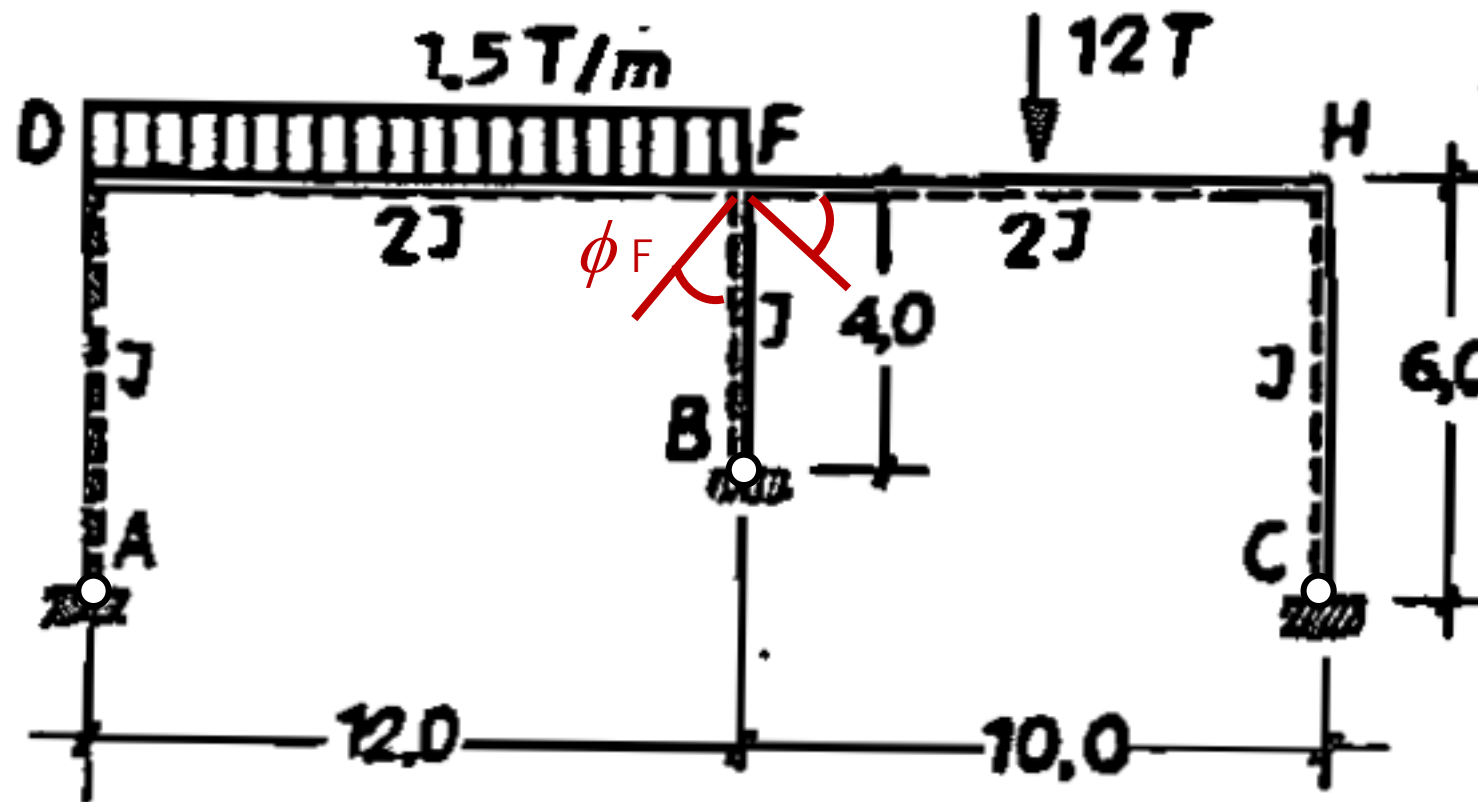
$$EJ = 17\,060 \text{ Tm}^2$$



$$\delta_H = 8,62 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

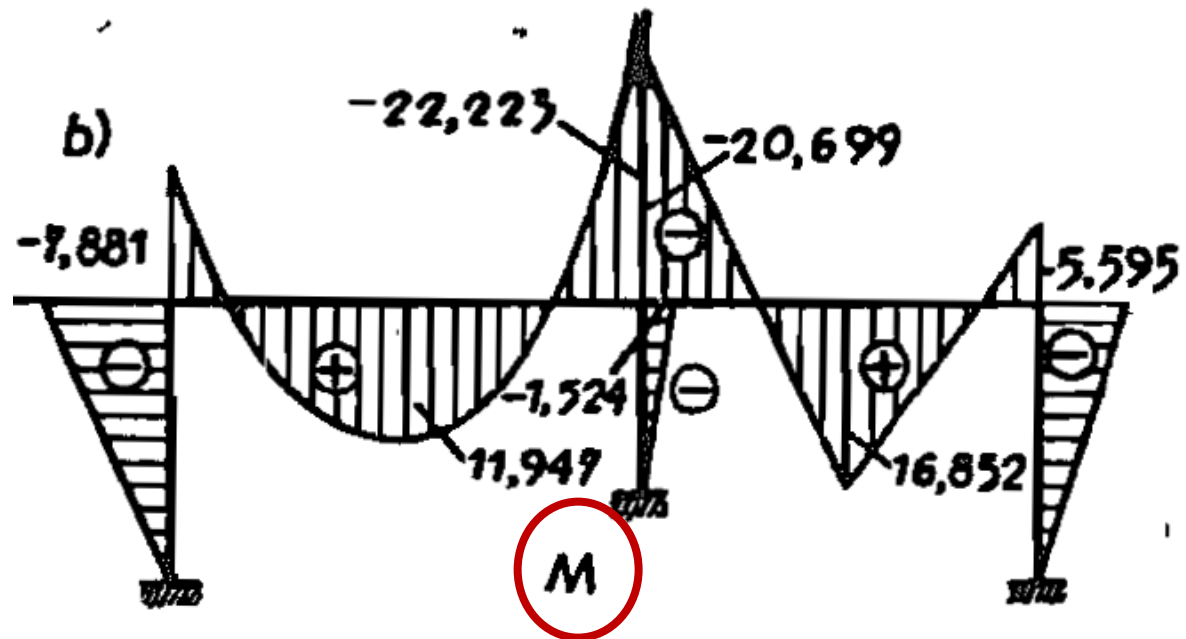


› Obliczyć przemieszczenie  $\phi_F$





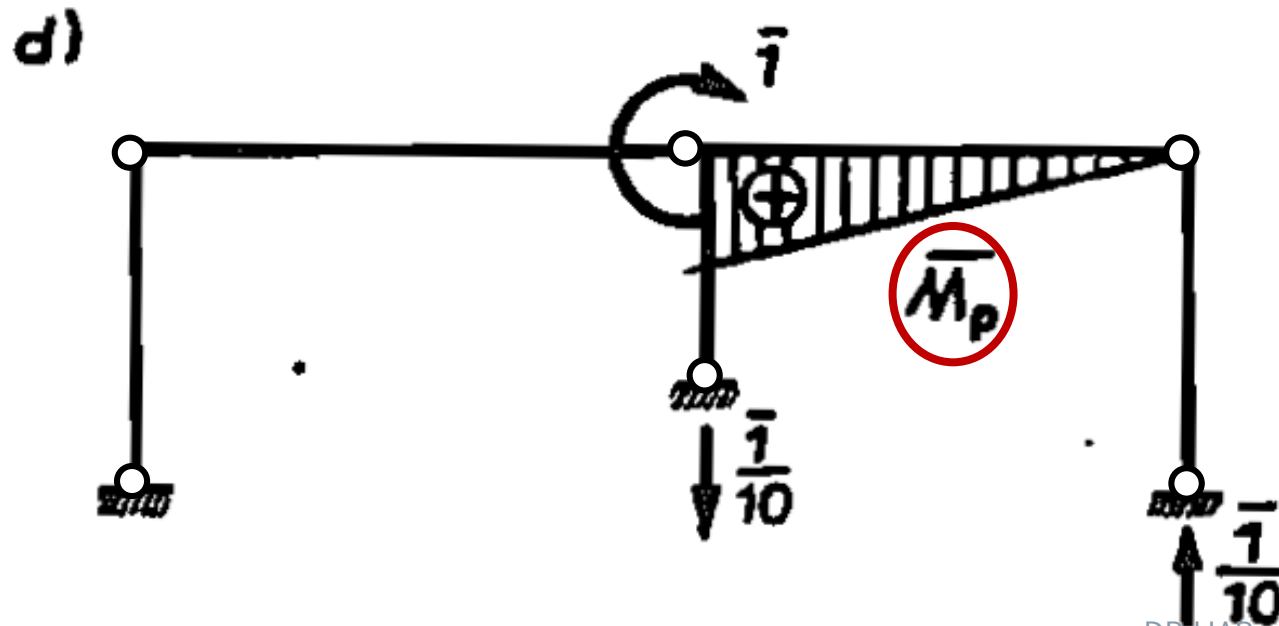




$$EJ = 17\,060 \text{ Tm}^2$$

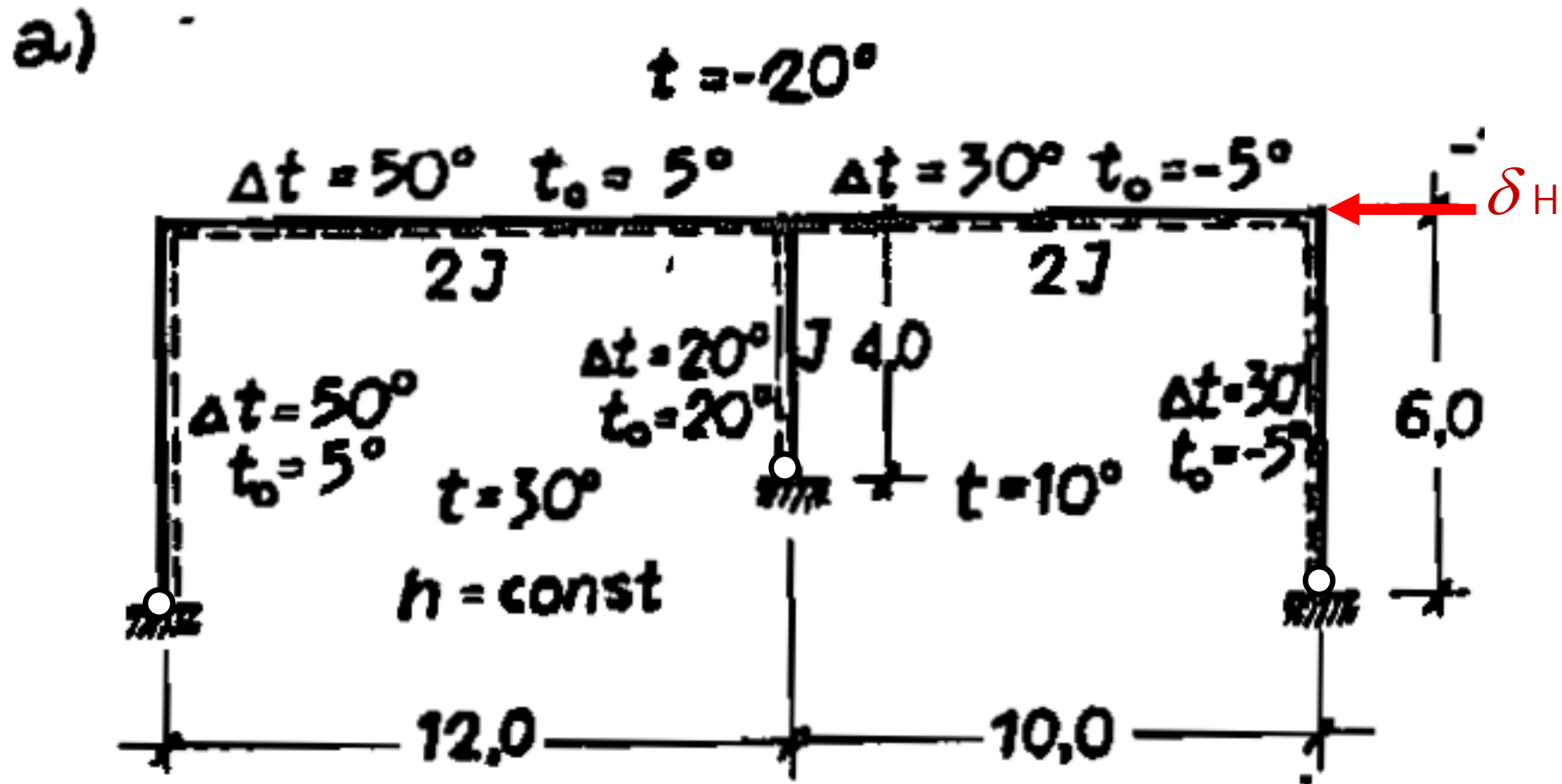
$$\psi_F = \int_s \frac{\bar{M}_p M}{EJ} ds = -1,66 \frac{1}{EJ} =$$

$$= -9,73 \cdot 10^{-5}$$

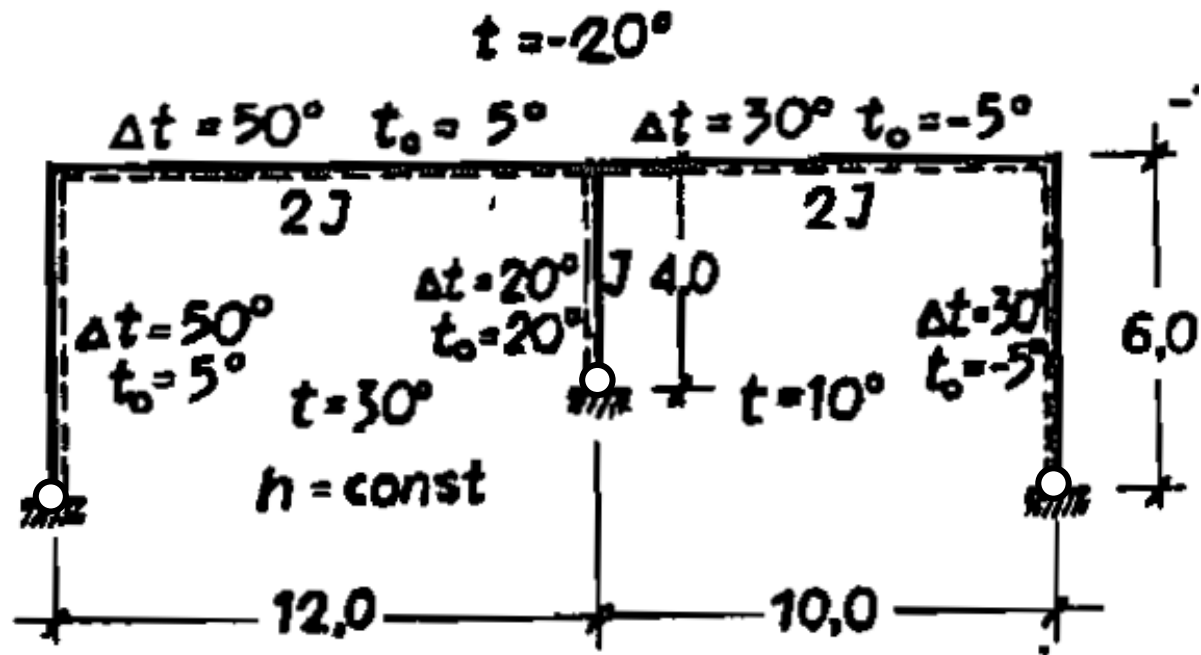


## Przykłady obliczeń - temperatura

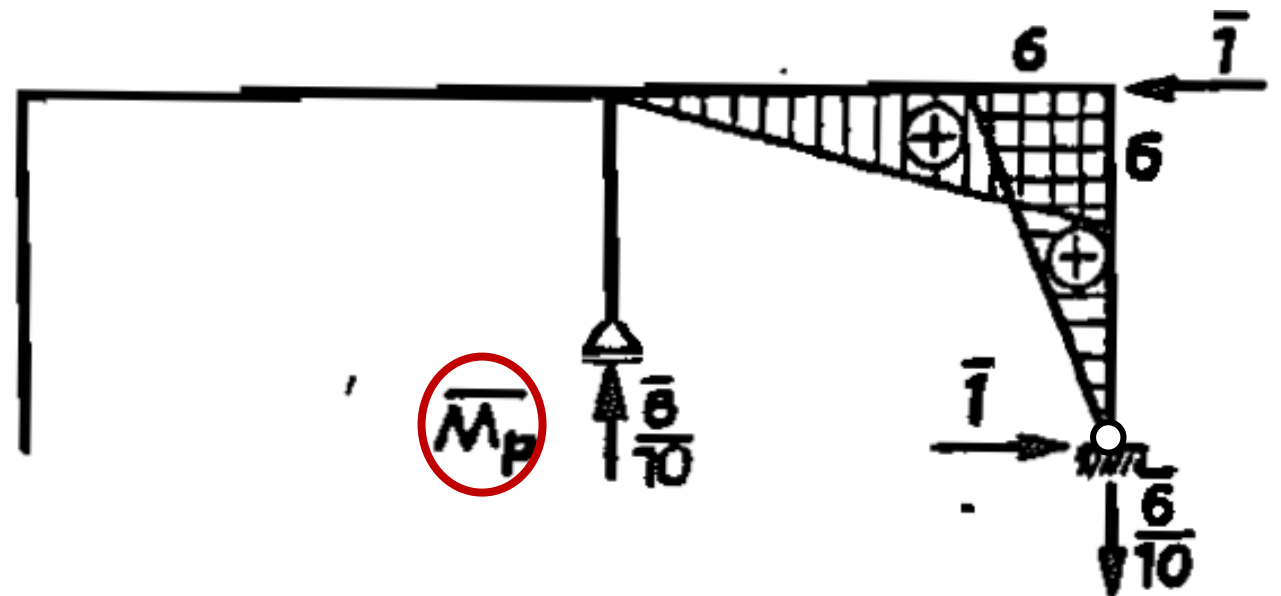
› Obliczyć przemieszczenie węzła H od temperatury



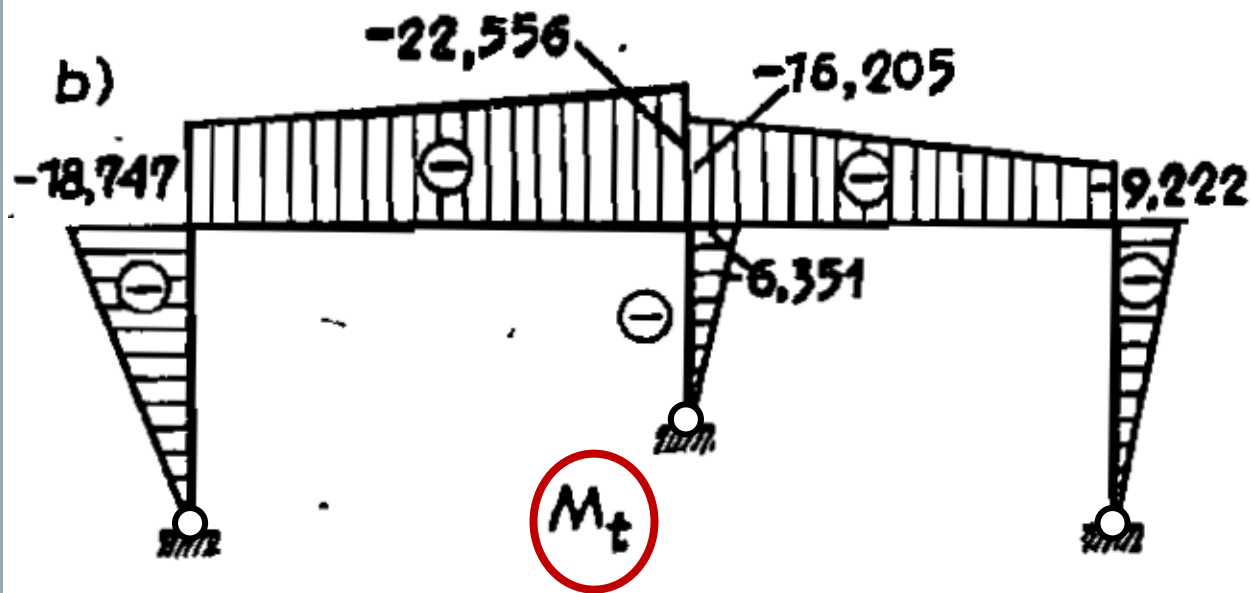
a)



Układ podstawowy

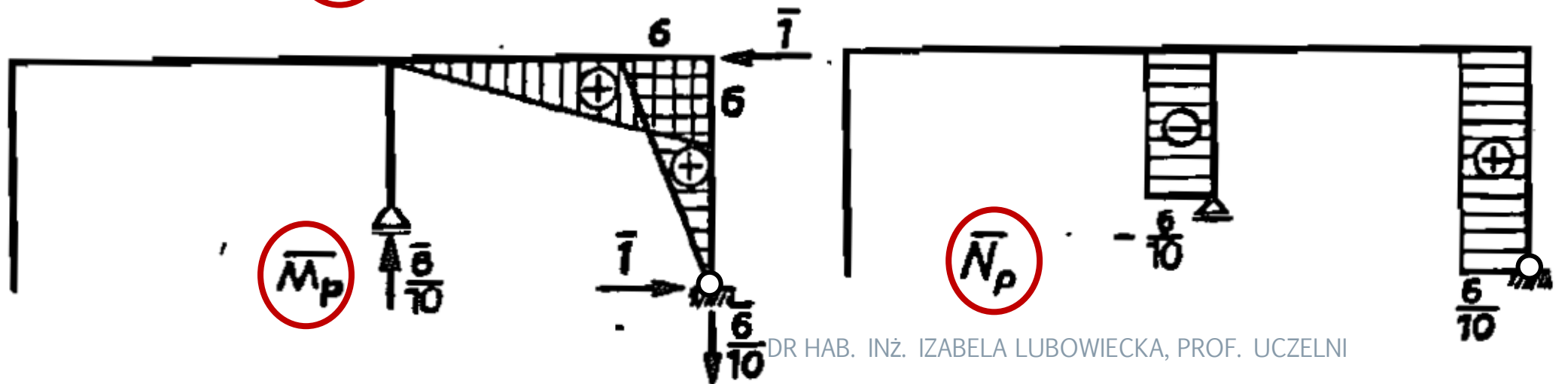


$$\delta_i = \int_s \bar{M}_p \frac{\alpha \Delta t}{h} ds + \int_s \bar{N}_p t_o ds + \int_s \left( \frac{\bar{M}_p M_t}{EJ} + \frac{\bar{N}_p N_t}{EA} + k \frac{\bar{T}_p T}{GA} \right) ds$$



$$\delta_H = 1734 \cdot 10^{-5} - 314,8 \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_H = -0,00111 \text{ m}$$



› Pierwsze twierdzenie redukcyjne dla przykładu ma postać

$$\delta_{\mathbf{i}} = \int_{\mathbf{s}} \bar{\dot{M}}_{\mathbf{p}} \frac{\alpha \Delta t}{h} d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{s}} \bar{N}_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{o}} d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{s}} \left( \frac{\bar{M}_{\mathbf{p}} M_{\mathbf{t}}}{EJ} + \frac{\bar{N}_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{t}}}{EA} + k \frac{\bar{T}_{\mathbf{p}} T_{\mathbf{t}}}{GA} \right) d\mathbf{s}.$$

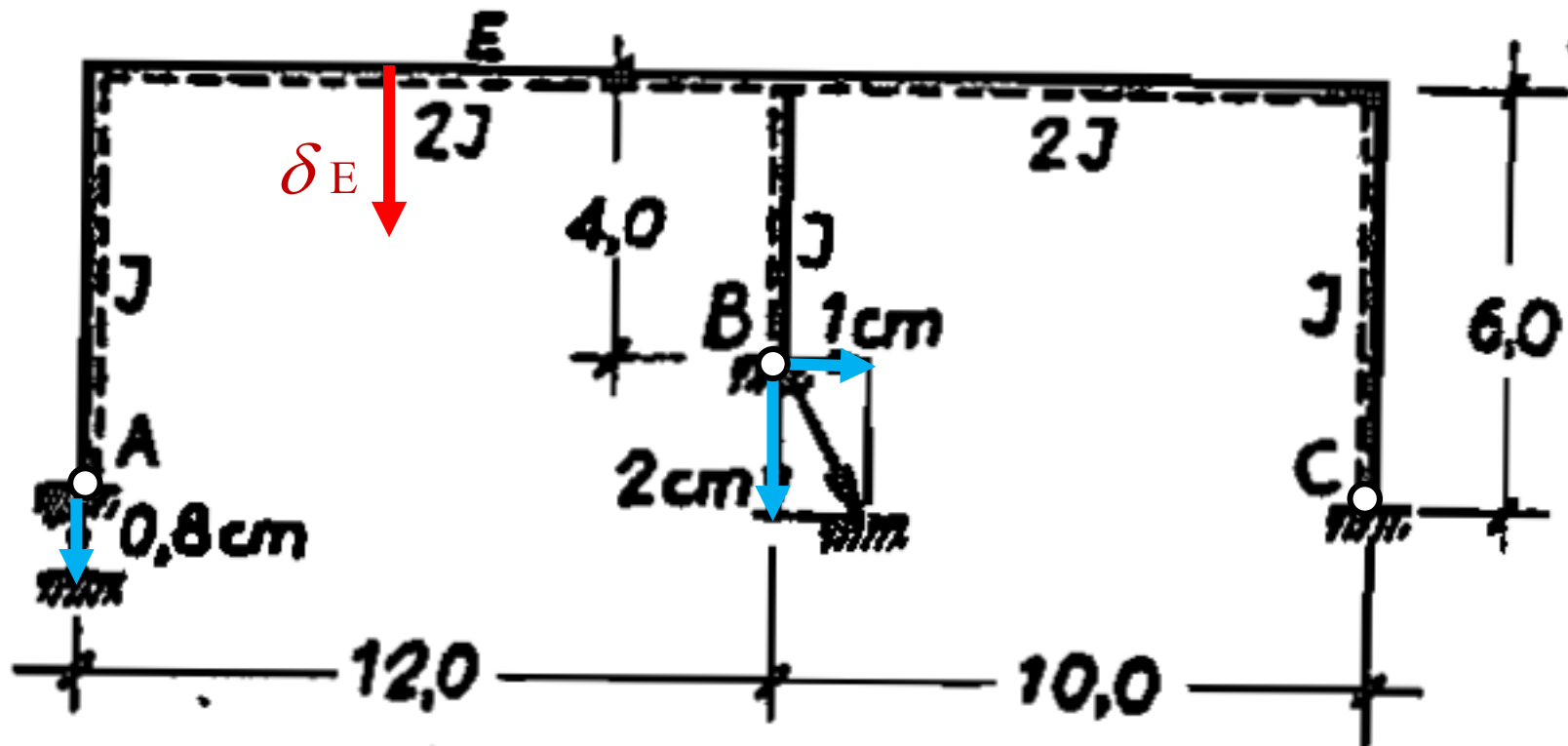
› Drugie twierdzenie redukcyjne

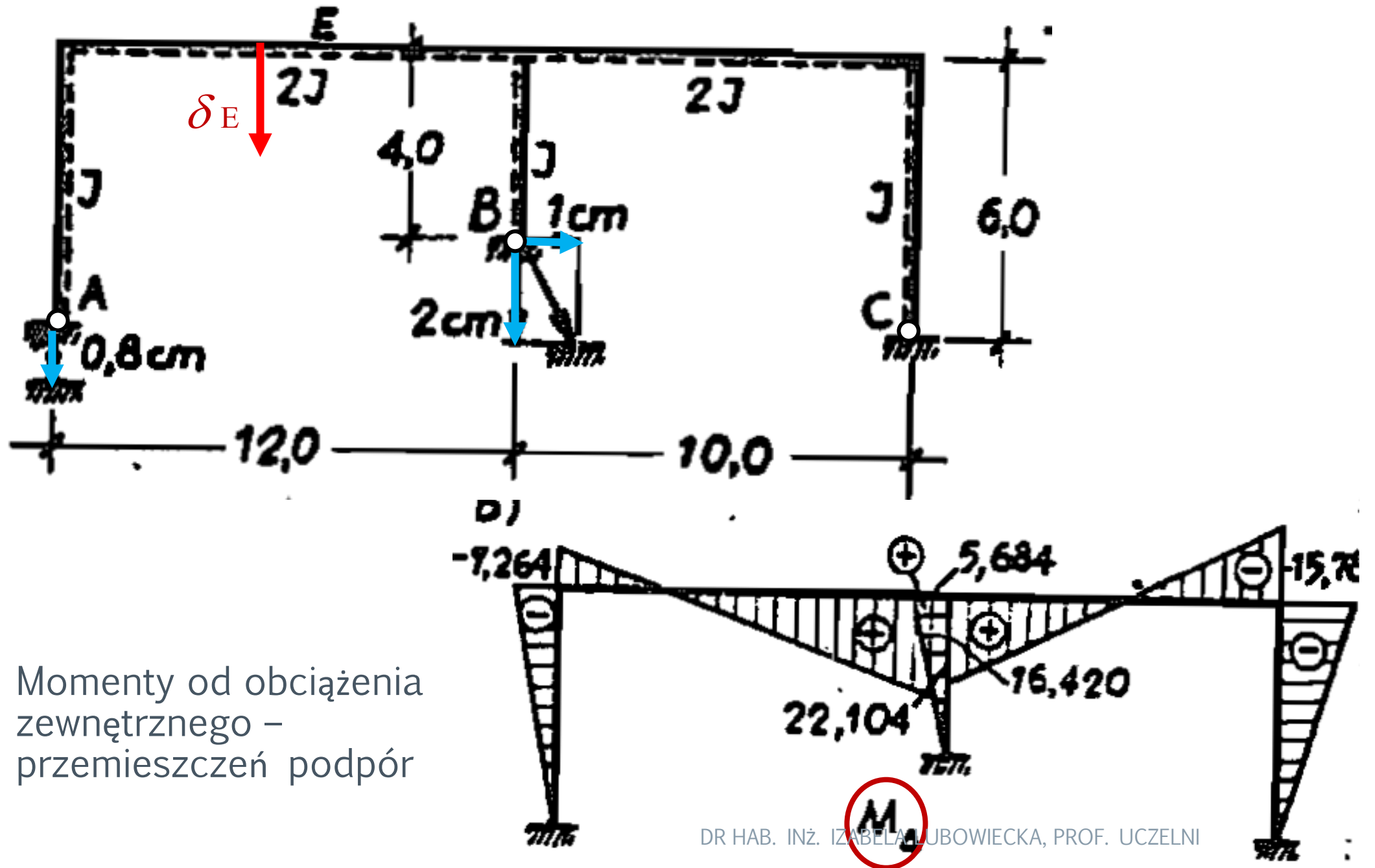
$$\delta_{\mathbf{i}} = \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds + \int \bar{N} \alpha t_{\mathbf{o}} ds$$

Skorzystamy z tw. pierwszego ze względu na znane siły wewnętrzne

# Przykłady obliczeń – przemieszczenie podpór

- › Obliczyć przemieszczenie w punkcie E od przemieszczenia podpór

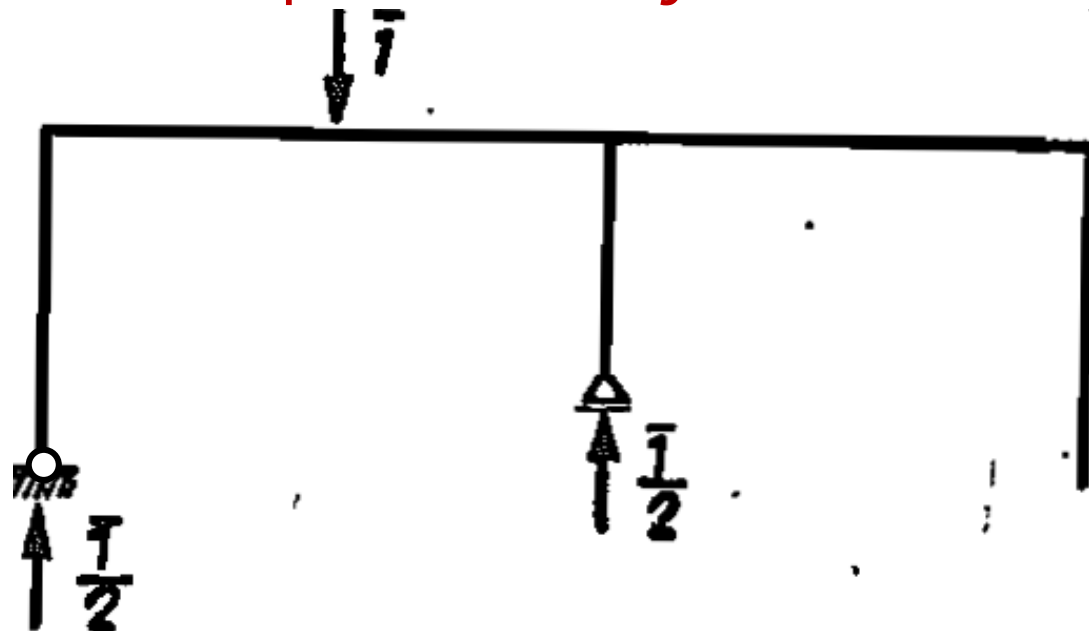




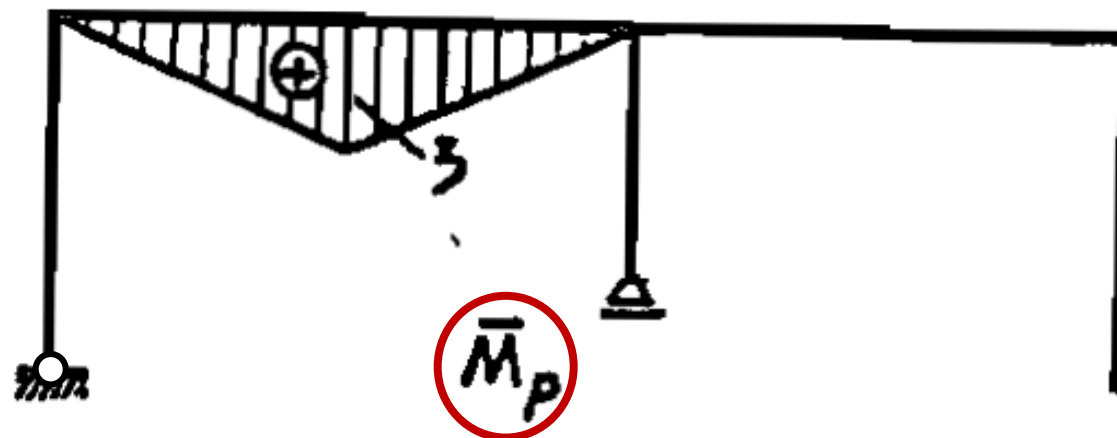
Momenty od obciążenia zewnętrznego – przemieszczeń podpór



## › Układ podstawowy



Momenty od obciążenia wirtualnego w miejscu poszukiwanego przemieszczenia



› Pierwsze twierdzenie redukcyjne dla przykładu ma postać

$$\delta_1 = -\sum \bar{R}_{p\Delta} + \int_{s_1} \left( \frac{\bar{M}_p M_{\Delta}}{EJ} + \frac{\bar{N}_p N_{\Delta}}{EA} + k \frac{\bar{T}_p T_{\Delta}}{GA} \right) ds$$

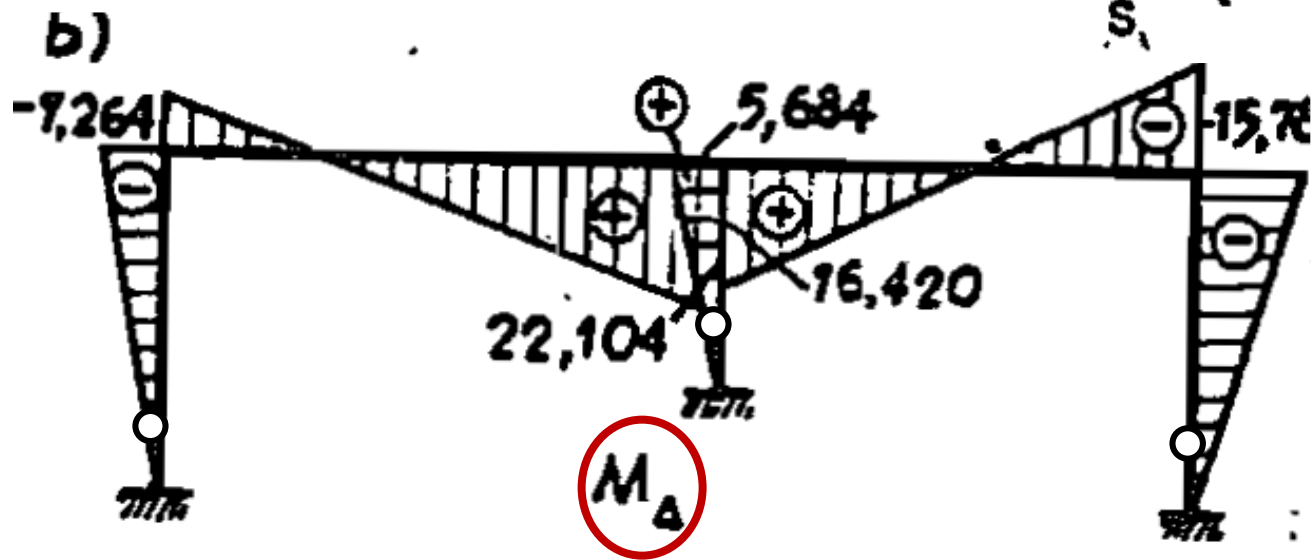
› Drugie twierdzenie redukcyjne ma znacznie prostszą postać

$$\delta_1 = -\sum \bar{R}_{\Delta}$$

Skorzystamy z tw. pierwszego ze względu na znane siły wewnętrzne

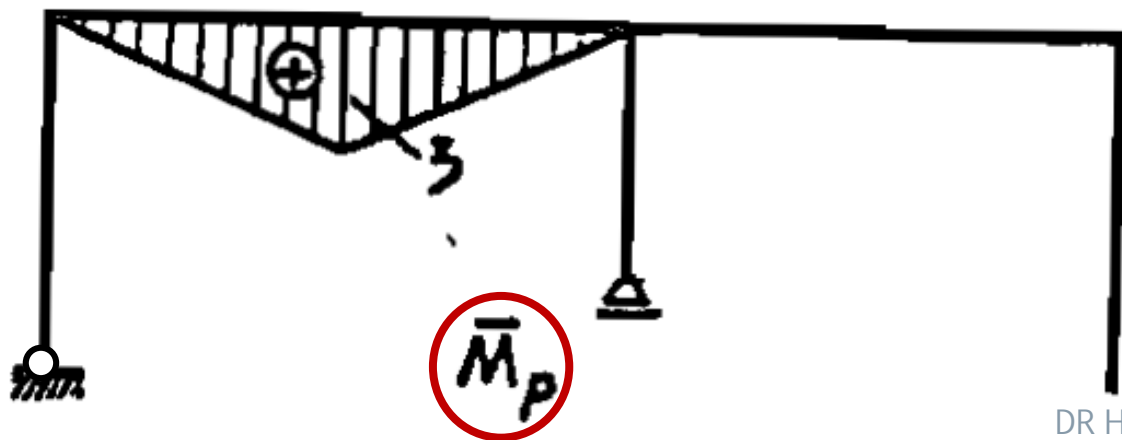
Korzystamy z I twierdzenia redukcyjnego ze względu na znane momenty (pomijamy N i T)

$$\delta_1 = -\sum \bar{R}_{p\Delta} + \int_s \left( \frac{\bar{M}_p M_{\Delta}}{EJ} + \frac{\bar{N}_p N_{\Delta}}{EA} + k \frac{\bar{T}_p T_{\Delta}}{GA} \right) ds$$



$$\delta_1 = -\sum \bar{R}_{\Delta}$$

$$\delta_E = 0,01791 \text{ m}$$



## ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA REDUKCYJNEGO DO KONTROLI **OBLICZEŃ STATYCZNYCH**

Za pomocą twierdzenia redukcyjnego możemy dokonać sprawdzenia istniejącego rozwiązania układu.

Na przykład kontrola poprawności wykresu momentów zginających może polegać na wyznaczeniu pewnego zerowego przemieszczenia tego układu.

Przyjęcie układu podstawowego i obliczanie przemieszczenia powinno być takie aby wykresy momentów zginających a co za tym idzie całkowanie graficzne było jak najprostsze.

# ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA REDUKCYJNEGO DO KONTROLI OBLICZEŃ

$\pi$

przykład

› Dane:

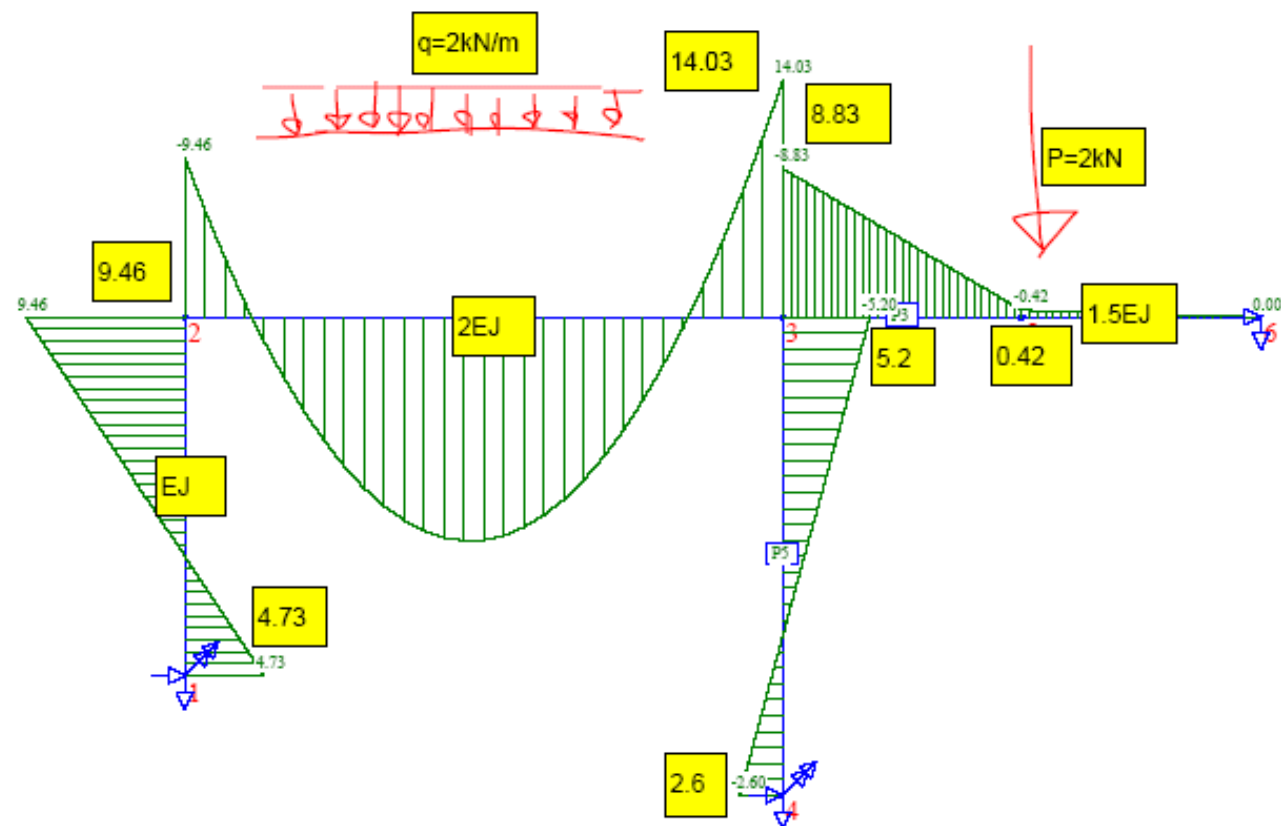
wysokość słupa lewego 6m,  
sztywność  $EJ$ ,

wysokość słupa prawego 8m,  
sztywność  $EJ$ ,

długość rygla lewego 10m,  
sztywność  $2EJ$ ,

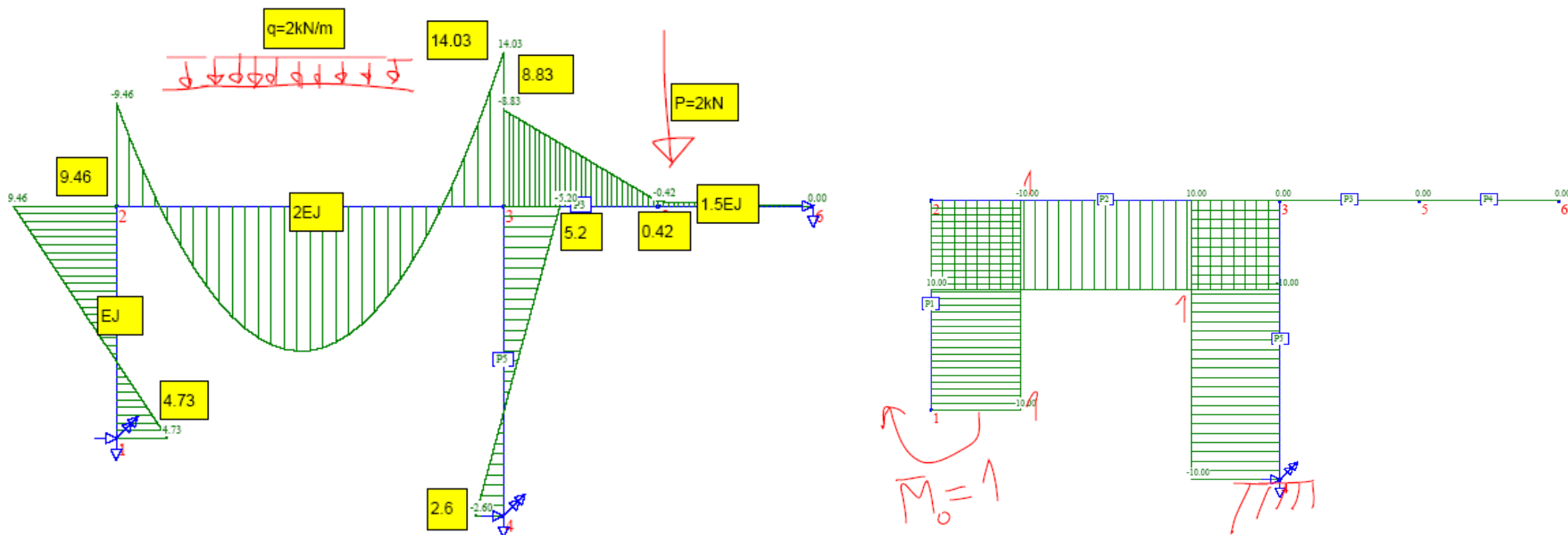
długość rygla prawego 8m,  
sztywność  $1,5EJ$ .

Wykres momentów zginających  
(obciążenie  $q=2\text{kN/m}$ ,  $P=2\text{kN}$ )



## ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA REDUKCYJNEGO DO KONTROLI OBLICZEŃ

- › Sprawdzenie wykresu momentów zginających wykonujemy obliczając obrót lewego utwierdzenia powyższej ramy. Wiadomo, że szukane przemieszczenie jest oczywiście zerowe. Przemieszczenie to wyznaczamy zakładając dowolny układ podstawowy i wirtualny moment zginający=1.



# ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA REDUKCYJNEGO DO KONTROLI OBLICZEŃ

Kąt obrotu utwierdzenia lewego słupa jest równy:

$$\varphi = (0.5 \times 4.75 \times 6 - 0.5 \times 9.46 \times 6) \frac{1}{EJ} +$$

$$(10 \times 25 \times 2/3 - 9.46 \times 0.5 \times 10 - 14.03 \times 10 \times 0.5) \frac{1}{2EJ}$$

$$+ (2.6 \times 8 \times 0.5 - 5.2 \times 8 \times 0.5) \frac{1}{EJ} =$$

$$-14.13 \frac{1}{EJ} + 49.2167 \frac{1}{2EJ} - 10.4 \frac{1}{EJ} \approx 0$$

