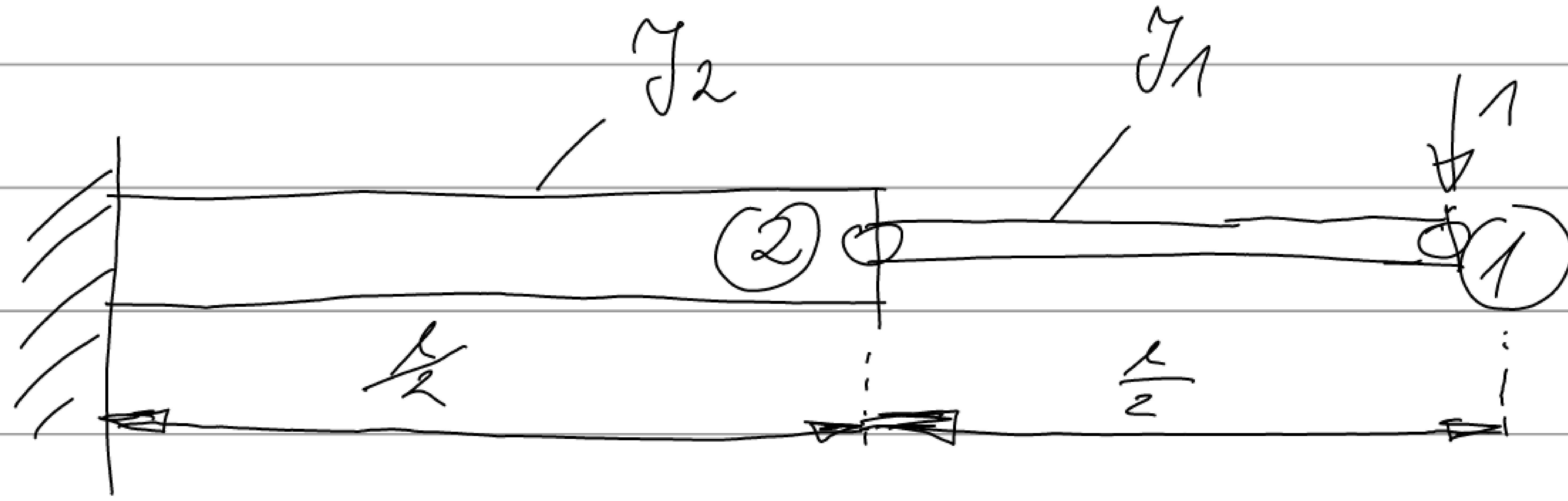
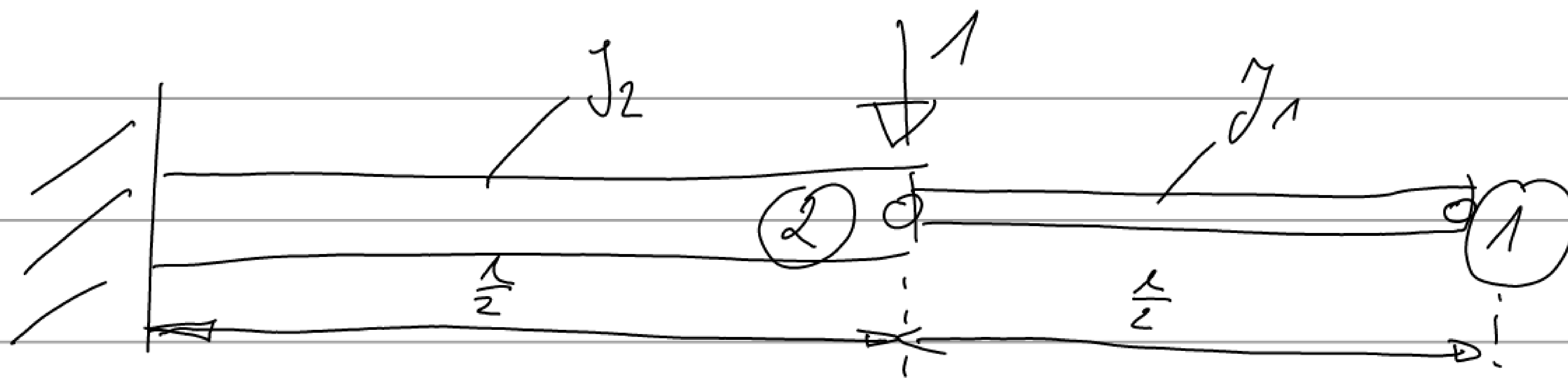




a)

Węzeł	$q_{s,i}$ [N]	w_i [m]
1	1	$f_A=\frac{Pl^3}{24EJ_2}\left(7+\frac{J_2}{J_1}\right)$
2	0	$f_B=\frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EJ_2}$

b)

Węzeł	$q_{s,i}$ [N]	w_i [m]
1	0	$f_A=\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{6EJ_2}\left(3l-\frac{l}{2}\right)$
2	1	$f_B=\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ_2}$

a) Węzeł $q_{S,i}$ [N] w_i [m]

① 1 $f_A = \frac{Pl^3}{24EJ_2}\left(7 + \frac{J_2}{J_1}\right)$

② 0 $f_B = \frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EJ_2}$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^1 & w_{12}^1 \\ w_{21}^1 & w_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{S1} \\ q_{S2} \end{bmatrix}$$

b) Węzeł $q_{S,i}$ [N] w_i [m]

① 0 $f_A = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{6EJ_2}\left(3l - \frac{l}{2}\right)$

② 1 $f_B = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ_2}$

Teraz możemy policzyć przemieszczenia w węzłach 1 i 2 dla dowolnego obciążenia q.

Jeśli za q_{S1} podstawimy 1, a za q_{S2} 0 to wrócimy do przypadku a) i w_1, w_2 będą równe wyliczonym f_A i f_B w przypadku siły jednostkowej przyłożonej na końcu belki

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^1 & w_{12}^1 \\ w_{21}^1 & w_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^1 \\ w_{21}^1 \end{bmatrix}$$

Za wektor sił możemy też przyjąć dowolne siły w węzłach 1 i 2 i policzyć jakie będzie przemieszczenie w tych węzłach.

Wspaniale:
Korzystając z prostych wzorów zawartych w tablicach znaleźliśmy odpowiedź dla wielu innych, bardziej złożonych przypadków. Warto zapamiętać tę metodę.

Aby zbudować macierz sztywności potrzebujemy jeszcze znaleźć takie wektory obciążeń $q_{s(A)}$ i $q_{s(B)}$, które z kolei wywołują jednostkowe przemieszczenia w węzłach 1 i 2, odpowiednio $w_A = [1, 0]$ $w_B = [0, 1]$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^1 & w_{12}^1 \\ w_{21}^1 & w_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{sA_1} \\ q_{sA_2} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 1 = w_{11}^1 \cdot q_{sA_1} + w_{12}^1 \cdot q_{sA_2} \\ 0 = w_{21}^1 \cdot q_{sA_1} + w_{22}^1 \cdot q_{sA_2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^1 & w_{12}^1 \\ w_{21}^1 & w_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{sB_1} \\ q_{sB_2} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 0 = w_{11}^1 \cdot q_{sB_1} + w_{12}^1 \cdot q_{sB_2} \\ 1 = w_{21}^1 \cdot q_{sB_1} + w_{22}^1 \cdot q_{sB_2} \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań

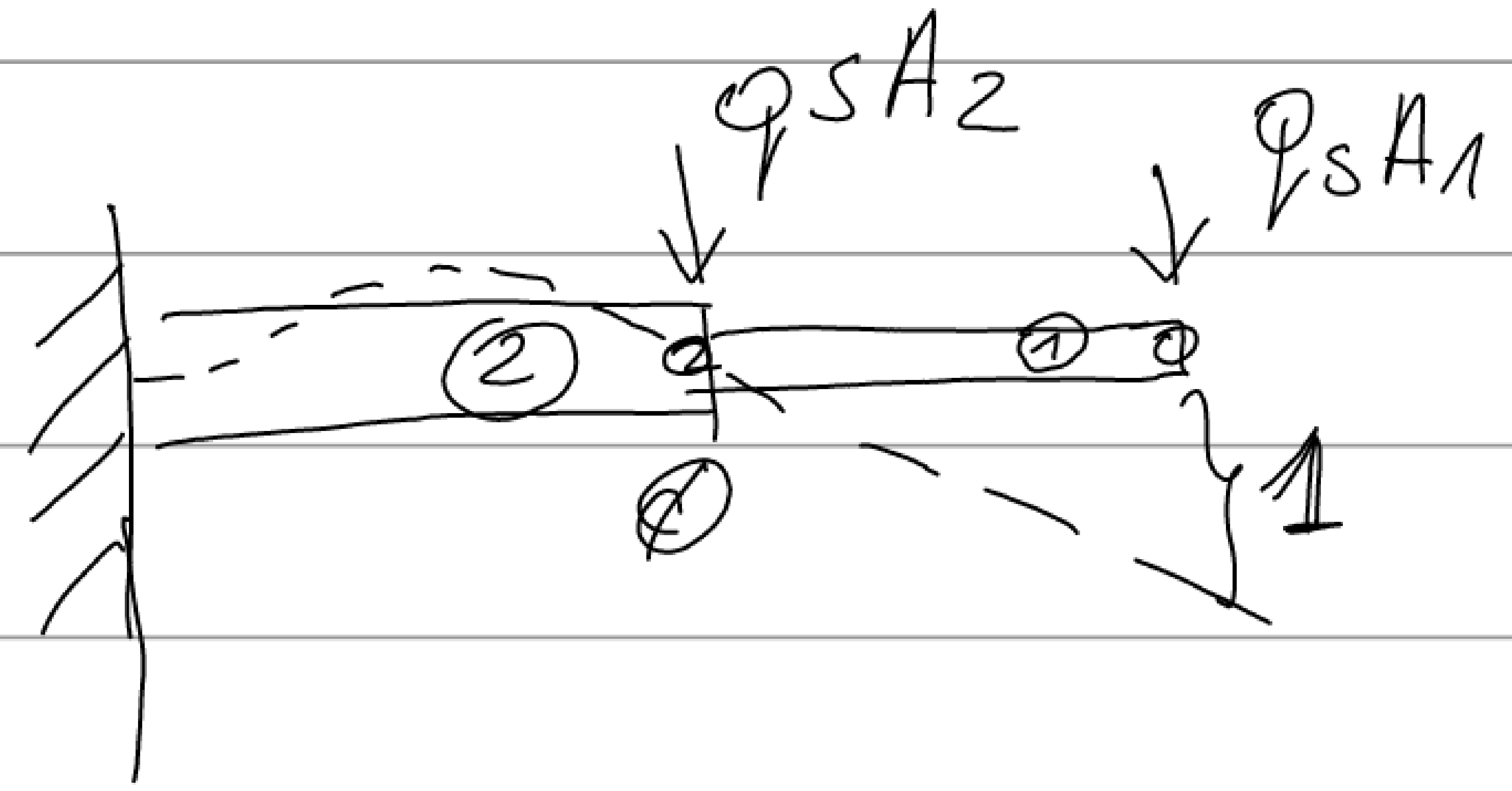
otrzymamy q_{sA1}, q_{sA2}, q_{sB1}, q_{sB2}

– obciążenia w węzłach ① i ②, które

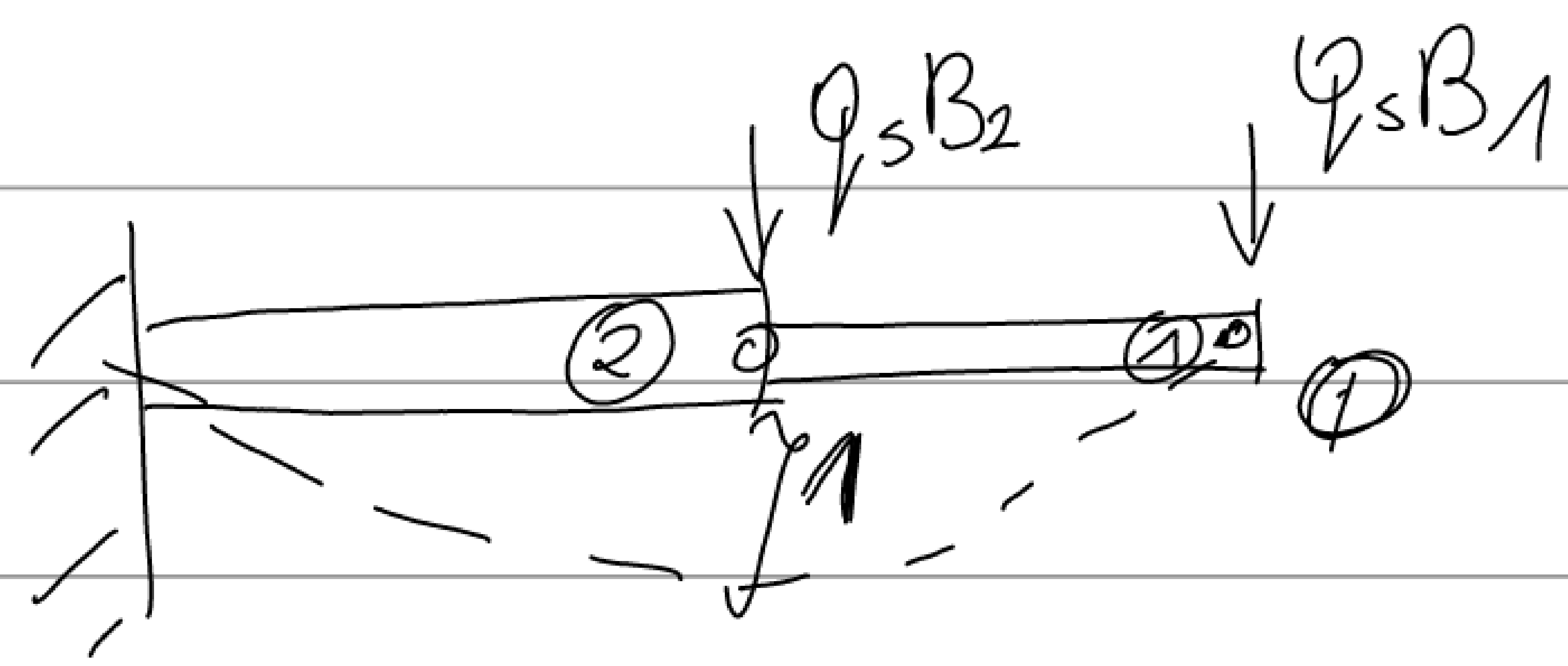
powodują jednostkowe przemieszczenia

w węzłach ① (q_{sA1} i q_{sA2}) i ② (q_{sB1} i q_{sB2})

A)



B)



Wracając do układu równań

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}W_{11}^1 & W_{12}^1\\ W_{21}^1 & W_{22}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_sA_1\\ q_sA_2\end{bmatrix} \quad \begin{cases}1 = W_{11}^1 \cdot q_sA_1 + W_{12}^1 \cdot q_sA_2\\ 0 = W_{21}^1 \cdot q_sA_1 + W_{22}^1 \cdot q_sA_2\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}W_{11}^1 & W_{12}^1\\ W_{21}^1 & W_{22}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_sB_1\\ q_sB_2\end{bmatrix} \quad \begin{cases}0 = W_{11}^1 \cdot q_sB_1 + W_{12}^1 \cdot q_sB_2\\ 1 = W_{21}^1 \cdot q_sB_1 + W_{22}^1 \cdot q_sB_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}1 = W_{11}^1 \cdot q_sA_1 + W_{12}^1 \cdot q_sA_2\\ 0 = W_{21}^1 \cdot q_sA_1 + W_{22}^1 \cdot q_sA_2\end{cases}$$

$$W_{21}^1 \cdot q_sA_1 = -W_{22}^1 \cdot q_sA_2$$

$$q_sA_1 = -\frac{W_{22}^1 \cdot q_sA_2}{W_{21}^1}$$

$$1 = W_{11}^1 \cdot -\frac{W_{22}^1 \cdot q_sA_2}{W_{21}^1} + W_{12}^1 \cdot q_sA_2$$

$$q_sA_2\left(\frac{-W_{11}^1 \cdot W_{22}^1}{W_{21}^1} + W_{12}^1\right) = 1 \;/\; (\;)$$

$$q_sA_2 = \frac{1}{\left(-\frac{W_{11}^1 W_{22}^1}{W_{21}^1} + W_{12}^2\right)}$$

$$q_{sA1} = -\frac{w^{1}_{12} \cdot q_{sA2}}{w^{1}_{21}} \Rightarrow q_{sA1} = \dots$$

$$q_{sA2} = \frac{1}{\left(-\frac{w^{1}_{11} w^{1}_{22}}{w^{1}_{21}} + w^{2}_{12}\right)}$$

podobnie q_{sB1} i q_{sB2}

i możemy zbudować macierz sztywności

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{sA1} & q_{sB1} \\ q_{sA2} & q_{sB2} \end{bmatrix}$$

I stąd relacja między przemieszczeniem węzłów a siłami sprężystymi

$q_s = K w$ } Jak w sprężynie – siła jest równa sztywność x przemieszczenie

Kot na poprawę nastroju ;-)