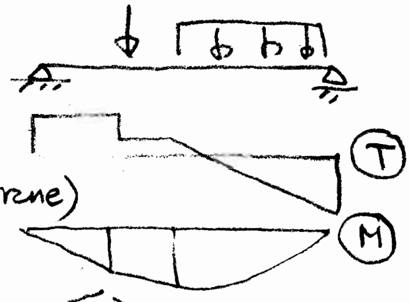
TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI
MECHANIKA CIAŁA STAŁEGO
MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

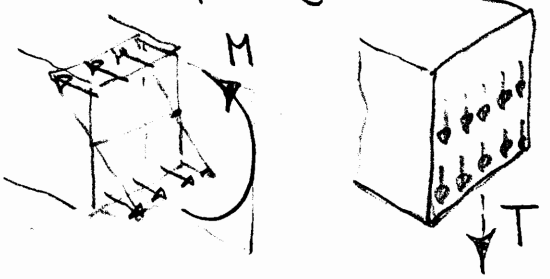
} zakres ten sam

ujęcie uproszczone – inżynierskie:

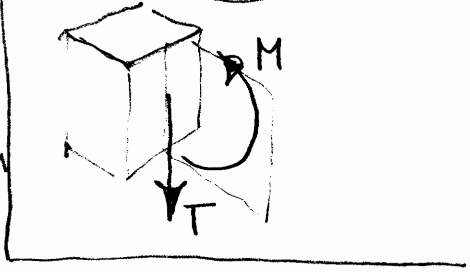
1) MECHANIKA BUDOWLI – model układu prętowego
zadanie: siły wewnętrzne M, T, N w elementach
(przekrój poprzeczny jako punkt osi pręta, w nim określone siły wewnętrzne)



2) WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW – zadanie: rozkłady naprężeń w przekrojach elementów prętowych



(przekrój poprzeczny jako figura płaska, w tym obszarze 2D określone naprężenie – funkcja dwóch zmiennych)



ZAKRES PRZEDMIOTU (główna część): układy dwuwymiarowe (dźwigary powierzchniowe) – tarcze, płyty

Cel: wielkości statyczne – naprężenia [jedn. siły/jedn. powierzchni]
wielkości określające stan geometryczny –
– przemieszczenia [jednostka długości]
– odkształcenia – względne [bezwymiarowe]

Powyższe wielkości definiowane są w każdym punkcie obiektu – ogólnie są one funkcjami położenia punktu – współrzędnych $\underset{\sim}{x} = \{x_1\ x_2\ x_3\}$ w 3D

Tylko w ujęciu uproszczonym (MB, WM) wielkości te obliczamy w prosty algebraiczny sposób.

W ogólnym ujęciu są to wielkości o charakterze **TENSOROWYM**.

TENSOR – ogólna matematyczna kategoria, grupująca zarówno wielkości skalarne, wektorowe jak i bardziej skomplikowane, o większej liczbie składowych. Założenie – przestrzeń euklidesowa 3D z kartezjańskim ukł. wsp. (bazą) $\underset{\sim}{x} \equiv x_i$

Rząd tensora (walencja) – liczba indeksów (wolnych) definiujących daną wielkość

Tensor walencji 0 – skalar – jedna liczba (masa, temperatura)
Tensor walencji 1 – wektor – trzy składowe $\underset{\sim}{u} \equiv u_i$ (np. położenie punktu)
Tensor walencji 2 – w danym ukł. wsp. macierz $\underset{\sim}{A} \equiv A_{ij}$ – 9 składowych

Tensor walencji n zawiera 3^n składowych

Dwojaki zapis wielkości tensorowych:

- wskaźnikowy (indeksowy) – liczba indeksów swobodnych jest walencją: a_i, B_{jk}
- absolutny: $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{B}$ (umowa: wektory małymi literami, tensory wyższych rzędów – wielkimi) $a_i = a_k = a_l$

RÓWNOWAŻNOŚĆ: $\underset{\sim}{a} \equiv a_i$, $\underset{\sim}{B} \equiv B_{jk}$

Umowa sumacyjna Einsteina – gdy w wyrażeniu jednomianowym indeks występuje dwukrotnie, względem niego następuje sumowanie (jest to tzw. indeks niemy, nie występuje w wyrażeniu wynikowym)

np. $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c \rightarrow$ liczba

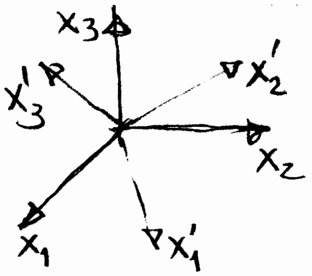
$A_{ij} c_j = A_{i1} c_1 + A_{i2} c_2 + A_{i3} c_3 = d_i \rightarrow$ wektor (trzy składowe, dla $i = 1, 2$ i 3)

$A_{ij} u_i u_j = A_{11} u_1^2 + A_{12} u_1 u_2 + \ldots = K \rightarrow$ liczba (9 składników)

$p_i = K_{ij} q_j$ tzw. forma kwadratowa macierzy $\underset{\sim}{A}$ ze względu na wektor $\underset{\sim}{u}$

Stąd indeksy swobodne to indeksy (wskaźniki) obecne w wyrażeniu wynikowym jednokrotnie

Podstawowa własność wielkości tensorowych (dowolnej walencji): przy zmianie układu współrzędnych (obrót) ich współrzędne transformują się zgodnie ze ścisłymi prawami



Przejście z układu $Ox_1x_2x_3$ do układu $Ox_1'x_2'x_3'$ opisane jest macierzą obrotu $\underset{\sim}{A} = A_{ij}$, gdzie $A_{ij} = \cos(x_i', x_j)$

Transformacja współrzędnych wektora przy zmianie układu wsp.

$$u_i' = A_{ij} u_j \qquad (\underset{\sim}{u}' = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u})$$

Transformacja współrzędnych tensora walencji II: $T_{ij}' = A_{ik} A_{jl} T_{kl}$ $(\underset{\sim}{T}' = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{A}^T)$ można uogólnić na tensory wyższych rzędów.

PRZYPADEK TENSORA WALENCJI II – PROBLEM WŁASNY
(analogia do problemu własnego macierzy)

Dany jest tensor $\underset{\sim}{A} = A_{ij}$, szukamy wektora $p = p_j \neq \underset{\sim}{0}$ takiego, że $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{p} = \lambda \underset{\sim}{p}$ gdzie λ jest mnożnikiem. Postać

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I})\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{0}$$

daje w rezultacie równanie algebraiczne

$$\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) = 0 \quad (*)$$

trzy rozwiązania λ_i (wartości własne tensora $\underset{\sim}{A}$) i odpowiadające im wektory $\underset{\sim}{p}_j$ (wektory własne).

Równanie (*) może być przedstawione w postaci: $\lambda^3 - I_A \lambda^2 + II_A \lambda - III_A = 0$

gdzie
$$\left.\begin{aligned} I_A &= \operatorname{tr}\underset{\sim}{A} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \\ II_A &= \tfrac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\underset{\sim}{A})^2 - \operatorname{tr}\underset{\sim}{A}^2\right] = \begin{vmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & \\ & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & \\ & A_{33} \end{vmatrix} \\ III_A &= \det \underset{\sim}{A} \end{aligned}\right\} \text{niezmienniki tensora walencji II}$$

Unormowane wektory $\underset{\sim}{p}^{(1)}$, $\underset{\sim}{p}^{(2)}$ i $\underset{\sim}{p}^{(3)}$ tworzą ortonormalną bazę. TS sz w 3

Tensor $\underset{\sim}{A} \equiv A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ w bazie tej ma postać $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

tak więc $I_A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $II_A = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$, $III_A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

Dowolny tensor walencji II można rozłożyć na tzw. część kulistą i dewiator

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & \text{reszta} & \\ & & \end{bmatrix}$$

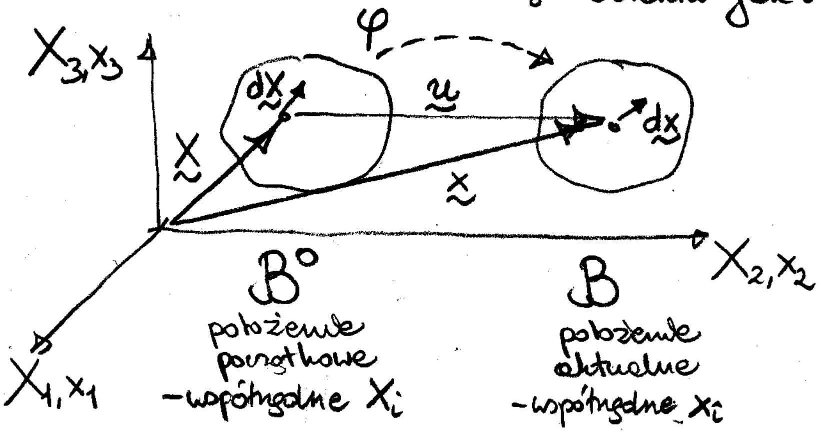
$$\underset{\sim}{A} = p\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S}$$

$$p = \frac{1}{3}(A_{11} + A_{22} + A_{33}) = \frac{1}{3}A_{ii} = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A}$$

DEFORMACJA OŚRODKA CIĄGŁEGO

deformacja – całkowita zmiana stanu geometrycznego obiektu

dwa składniki:
1) translacja i obrót jak dla bryły sztywnej
2) zmiana wymiarów i kształtu, tak globalnie w skali całego obiektu jak i lokalnie, w otoczeniu danego punktu



W chwili początkowej dany punkt miał współrzędne X_i $(i=1,2,3)$, w chwili aktualnej ma współrzędne x_i $(i=1,2,3)$

Deformacja – przekształcenie φ konfiguracji $\mathcal{B}^0$ w konfigurację $\mathcal{B}$, inaczej: współrzędnych X_i we wsp. x_i

Dwie formy opisu deformacji:

1) ruch wybranej cząstki ciała (np. punktu na osi belki), współrzędne aktualne w funkcji współrzędnych początkowych $\underset{\sim}{x} = \varphi(\underset{\sim}{X})$ → OPIS MATERIALNY (Lagrange'a)

opis ten odnosi się do współrzędnych początkowych, współrzędne te zwane są więc materialnymi lub wsp. Lagrange'a

2) obserwacja wybranego punktu przestrzeni (np. przepływ wody przez określony punkt) – w punkcie tym, o współrzędnych X_i mogą pojawiać się różne cząstki, o różnych współrzędnych aktualnych x_i, stąd $\underset{\sim}{X} = \gamma(\underset{\sim}{x})$ [lub $\underset{\sim}{X} = \varphi^{-1}(\underset{\sim}{x})$]

Jest to OPIS PRZESTRZENNY (Eulera), odnosi się do współrzędnych aktualnych, zwanych współrzędnymi przestrzennymi bądź wsp. Eulera

Elementarny odcinek (wektor) $d\underset{\sim}{X}$ przyjmuje aktualną postać $d\underset{\sim}{x}$. Zachodzi: $d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X}$,

$$\underset{\sim}{F} \equiv F_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

materialny gradient deformacji,
liniowa forma (przybliżenie) odwzorowania $\underset{\sim}{\varphi}$

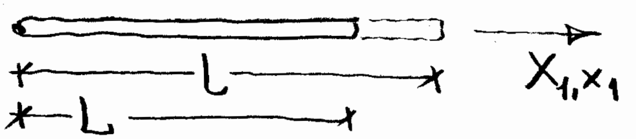
Miary zmian stanu geometrycznego: tensor deformacji Greena $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F}$

$(C_{ik} = F_{ji} F_{jk})$ tensor odkształceń Lagrange-Greena $\underset{\sim}{E} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{I})$

UWAGA: Gradient deformacji $\underset{\sim}{F}$ nie musi być symetryczny - może zajść $\underset{\sim}{F} \neq \underset{\sim}{F}^T$
oba tensory $\underset{\sim}{C}$ i $\underset{\sim}{E}$ są symetryczne $(\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{C}^T,\ \underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E}^T)$

Można wprowadzić miary zmian stanu geometrycznego także w opisie przestrzennym:
- tensor deformacji Cauchy $\underset{\sim}{c} = (\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^T)^{-1}$
- tensor odkształceń Eulera-Almansi $\underset{\sim}{e} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{c})$

Rozciąganie jednoosiowe (bez zmiany pozostałych wymiarów)



$$x_1 = \frac{l}{L} X_1 = \lambda X_1 \qquad \lambda = \frac{l}{L} \text{ - rozciągnięcie (stretch)}$$

Gradient deformacji $\underset{\sim}{F}$:

$F_{11} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \lambda$, $F_{22} = F_{33} = 1$, pozostałe zerowe

Opis materialny: z tensora deformacji Greena $\underset{\sim}{C}$ $\longrightarrow$ $C_{11} = \lambda^2$
z tensora odkształceń Lagrange-Greena $\underset{\sim}{E}$ $\longrightarrow$ $E_{11} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$

Opis przestrzenny: z tensora deformacji Cauchy $\underset{\sim}{c}$ $\longrightarrow$ $c_{11} = \frac{1}{\lambda^2}$
z tensora odkształceń Eulera-Almansi $\underset{\sim}{e}$ $\longrightarrow$ $e_{11} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)$

PRZYKŁAD - SKOŃCZONA DEFORMACJA 5

Wyrażenie miar odkształceń (tensorów odkształceń) przez przemieszczenie

Opis materialny

materialny gradient przemieszczenia (zapis umowny)

$$\nabla \underset{\sim}{u} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

macierz (tensor II walencji)

Ponieważ $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{X}$ więc $\nabla\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{F} - \underset{\sim}{I}$, $\underset{\sim}{F} = \nabla\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{I}$

więc $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{I} + \nabla\underset{\sim}{u} + \nabla\underset{\sim}{u}^T + \nabla\underset{\sim}{u}^T \nabla\underset{\sim}{u}$

$$\underset{\sim}{E} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{I}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\underset{\sim}{u} + \nabla\underset{\sim}{u}^T + \nabla\underset{\sim}{u}^T \nabla\underset{\sim}{u}\right)$$

Opis przestrzenny przestrzenny gradient przemieszczenia $\nabla \underset{\sim}{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \dots$

$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{X}$, więc $\underset{\sim}{F}^{-1} = I - \nabla \underset{\sim}{u}$ $\qquad \underset{\sim}{F}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$

stąd $\quad \underset{\sim}{c} = \left(\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{F}^T\right)^{-1} = \underset{\sim}{I} - \nabla \underset{\sim}{u} - \nabla \underset{\sim}{u}^T + \nabla \underset{\sim}{u}^T \nabla \underset{\sim}{u}$

$$\underset{\sim}{e} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{c}\right) = \frac{1}{2}\left[\nabla \underset{\sim}{u} + \nabla \underset{\sim}{u}^T - \nabla \underset{\sim}{u}^T \nabla \underset{\sim}{u}\right]$$

Założenia: – małe odkształcenia $(\nabla \underset{\sim}{u} \ll 1,\ \nabla \underset{\sim}{U} \ll 1)$ – pomijamy składniki nieliniowe

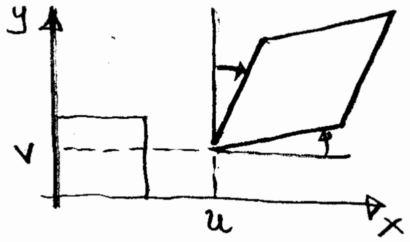
– małe przemieszczenia $(\underset{\sim}{X} \approx \underset{\sim}{x}) \Rightarrow \nabla \underset{\sim}{U} \approx \nabla \underset{\sim}{u}$

wtedy w przybliżeniu jest $\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{e} = \frac{1}{2}\left(\nabla \underset{\sim}{u} + \nabla \underset{\sim}{u}^T\right) = \underset{\sim}{\varepsilon}$ – tensor małych odkształceń

B. WAŻNE RÓWNANIA –
ZWIĄZKI KINEMATYCZNE

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Nawiązanie do kursu Wytrzymałości Materiałów:



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \to \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

PROBLEM WŁASNY TENSORA MAŁYCH ODKSZTAŁCEŃ

Z warunku $\left(\underset{\sim}{\varepsilon} - \varepsilon \underset{\sim}{I}\right)\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{0}$ wynika, że niezerowy wektor $\underset{\sim}{n} \neq \underset{\sim}{0}$ istnieje wtedy, gdy $\det\left(\underset{\sim}{\varepsilon} - \varepsilon \underset{\sim}{I}\right) = 0$ → równanie $\varepsilon^3 - I_\varepsilon \varepsilon^2 + II_\varepsilon \varepsilon - III_\varepsilon = 0$

gdzie $I_\varepsilon = \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{ii}$; $II_\varepsilon = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon})^2 - \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^2\right]$, $III_\varepsilon = \det \underset{\sim}{\varepsilon}$

rozwiązanie – trzy wartości $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}$ i odpowiadające im wektory $\underset{\sim}{n}^{(1)}, \underset{\sim}{n}^{(2)}, \underset{\sim}{n}^{(3)}$
– ODKSZTAŁCENIA GŁÓWNE
KIERUNKI GŁÓWNE

Unormowane wektory $\underset{\sim}{n}^{(i)}$ tworzą macierz obrotu $\underset{\sim}{A}$, wskutek transformacji tensor wyjściowy $\underset{\sim}{\varepsilon}$ przyjmuje diagonalną postać $\underset{\sim}{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{bmatrix}$.

Interpretacja: w układzie kierunków głównych [wersorów $\underset{\sim}{n}^{(i)}$] w rozpatrywanym stanie istnieją jedynie odkształcenia podłużne – zmiana wymiarów, brak odkształceń postaciowych.

Odkształcenie w danym stanie w kierunku dowolnego wersora $\underset{\sim}{n}$ obliczamy:

$$\varepsilon^{(n)} = \underset{\sim}{n}^T \underset{\sim}{\varepsilon}\, \underset{\sim}{n} \qquad \left(\varepsilon^{(n)} = \varepsilon_{ij} n_i n_j\right)$$

forma kwadratowa

PRZYKŁAD: DANE $\nabla \underset{\sim}{u}$, OBLICZYĆ ODKSZTAŁCENIA GŁÓWNE I ICH KIERUNKI 4

RÓWNANIA NIEROZDZIELNOŚCI (CIĄGŁOŚCI) w R^3 TS sz W6

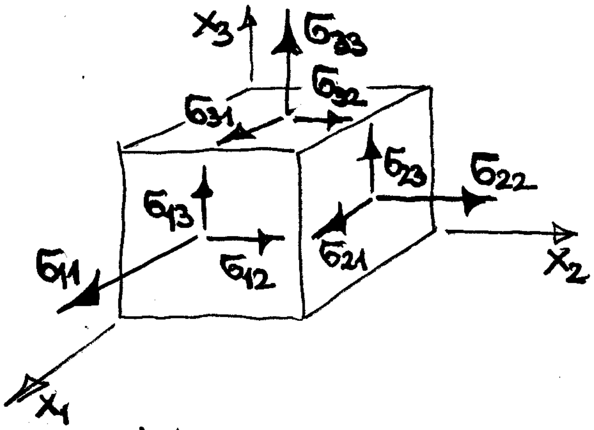
Konsekwencją związków kinematycznych są równania wiążące poszczególne składowe tensora małych odkształceń $\underset{\sim}{\varepsilon} \equiv \underset{\sim}{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3)$

Zapis ogólny: $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$

(np. $\varepsilon_{12,13} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3}$) ogólnie powinno być 81 równań, jednak tylko 6 niezależnych

Na płaszczyźnie – jedno: $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$

OPIS STANU NAPRĘŻENIA



Jednolita symbolika $\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$

„i" – oś prostopadła do ścianki

„j" – kierunek składowej

Tensor naprężeń Cauchy

$$\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

W innym prostokątnym układzie współrzędnych, określonym macierzą obrotu $\underset{\sim}{A} \equiv A_{ij}$ (ortogonalną), tensor naprężeń przyjmuje postać

$$\underset{\sim}{\sigma}' = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\sigma}\,\underset{\sim}{A}^T \quad \left(\sigma_{ij} = A_{ik}\sigma_{kl}A_{jl}\right)$$

Gdy znany jest tensor $\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$, wektor naprężenia na ściance o normalnej $\underset{\sim}{n} \equiv n_k$ ma postać: $\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{n}$ $\quad (t_i = \sigma_{ji} n_j)$

Jest to tzw. postulat Cauchy   ĆWICZENIE: zbadać przypadki $\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{e}$

<u>Równania równowagi ośrodka ciągłego</u> (lokalnie, w otoczeniu punktu)

Suma rzutów: $\operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma}^T + \rho\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$, wskaźnikowo: $\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0$

$\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ – tensor naprężeń Cauchy   ĆWICZENIE: rozpisać

$\underset{\sim}{b} \equiv b_k$ – wektor sił objętościowych

Suma momentów: $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}^T$, wskaźnikowo $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Zagadnienia TS są statycznie niewyznaczalne – z samych równań równowagi nie uzyska się rozwiązania $(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{u})$

<u>Naprężenia główne i ich kierunki</u>

ZADANIE: ustawić płaszczyznę przekroju tak, aby $\underset{\sim}{t} \parallel \underset{\sim}{n}$ (wektor naprężenia normalny)

Zapis $\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{\sigma}\,\underset{\sim}{n} = \sigma\,\underset{\sim}{n} \Rightarrow (\underset{\sim}{\sigma} - \sigma\underset{\sim}{I})\,\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{0}$, rozwiązania $\underset{\sim}{n} \neq \underset{\sim}{0}$ wtedy, gdy $\det(\underset{\sim}{\sigma} - \sigma\underset{\sim}{I}) = 0 \Rightarrow$ równanie algebraiczne $\sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 + II_\sigma \sigma - III_\sigma = 0$

gdzie $I_\sigma = \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_{ii}$; $II_\sigma = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\,\sigma)^2 - \mathrm{tr}\,\sigma^2\right] = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}\right)$

$III_\sigma = \det \underset{\sim}{\sigma}$ → NIEZMIENNIKI TENSORA $\underset{\sim}{\sigma}$

Rozwiązania równania – wartości własne (naprężenia główne) $\sigma^{(i)}$, $i=1,2,3$
i odpowiadające im wektory własne (kierunki naprężeń głównych) $\underset{\sim}{n}^{(i)}$, $i=1,2,3$

Reprezentacja tensora naprężeń $\underset{\sim}{\sigma}$ w układzie kierunków głównych (w bazie wektorów własnych)

$$\underset{\sim}{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{(3)} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\left(\sigma^{(i)}\right)$$

$I_\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}$

$II_\sigma = \sigma^{(1)}\sigma^{(2)} + \sigma^{(2)}\sigma^{(3)} + \sigma^{(3)}\sigma^{(1)}$

$III_\sigma = \sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}$

Ćwiczenie matematyczne: dana jest dowolna macierz $\underset{\sim}{A} \equiv A_{ij}$
- rozpisać równanie $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) = 0$ jako wielomian stopnia 3 względem λ, ustalić
- obliczyć drugą macierzową $II_A = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A})^2 - \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A}^2\right]$, tę samą wartość w sposób wskaźnikowy $II_A = \frac{1}{2}\left[A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}\right]$ a następnie sprawdzić, czy jest ona równoważna sumie tzw. minorów głównych (opartych na głównej przekątnej)

Tensor naprężeń Cauchy można przedstawić jako sumę tzw. tensora kulistego i dewiatora

$\boxed{\text{ZADANIE} \to 3,4}$

$$\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_m \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S} \qquad \left(\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij}\right)$$

niezmienniki

$I_S = \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{S} = 0$

$II_S = -\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$

Można wykazać, że przy ustaleniu naprężeń głównych $\sigma^{(1)} \geq \sigma^{(2)} \geq \sigma^{(3)}$ wielkość $\sigma^{(1)}$ jest największym, zaś $\sigma^{(3)}$ najmniejszym, spośród wszystkich naprężeń normalnych w danym punkcie (dowód → ekstrema funkcji wielu zmiennych, metoda mnożników Lagrange'a)

RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE (równania materiałowe, związki fizyczne)

Zależności $\underset{\sim}{\sigma} \leftrightarrow \underset{\sim}{\varepsilon}$ tworzone dla poszczególnych materiałów i weryfikowane na drodze eksperymentu.

Są jedyną formą opisu materiału → opis stanu naprężenia i stanu deformacji jest jednakowy we wszystkich materiałach

W ogólnym przypadku zależności $\underset{\sim}{\sigma} \leftrightarrow \underset{\sim}{\varepsilon}$ zależą od historii obciążenia (materiały z pamięcią)
Gdy zależności takiej brak → **materiały sprężyste** – istnieją wzajemnie odwracalne zależności $\underset{\sim}{\sigma} = f(\underset{\sim}{\varepsilon})$ i $\underset{\sim}{\varepsilon} = g(\underset{\sim}{\sigma}) = f^{-1}(\underset{\sim}{\sigma})$

Materiał liniowosprężysty: zależności między wszystkimi składowymi liniowe

$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}$ (działanie tensorowe) $\qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$

$\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ – tensor naprężeń Cauchy

$\underset{\sim}{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ij}$ – tensor małych odkształceń

$\underset{\sim}{C} \equiv C_{ijkl}$ – tensor stałych sprężystych – ogólnie 81 składowych

Symetria tensorów $\underset{\sim}{\sigma}$ i $\underset{\sim}{\varepsilon}$ → 36 składowych tensora $\underset{\sim}{C}$

Związek $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$ z 36 stałymi tworzy tzw. uogólnione prawo Hooke'a w ośrodku anizotropowym (możliwość: $\underset{\sim}{\sigma}$ i $\underset{\sim}{\varepsilon}$ – wektory 6×1, $\underset{\sim}{C}$ – macierz 6×6)

Spośród 36 stałych 21 jest niezależnych

- materiał ortotropowy – trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny symetrii → 9 stałych
- izotropia poprzeczna (symetria obrotowa względem jednej osi) → 5 stałych
- Izotropia – w każdym kierunku własności jednakowe → 2 stałe

Zapis związków fizycznych liniowej teorii sprężystości – ciało izotropowe

$$\underset{\sim}{\sigma} = \lambda \underset{\sim}{I}\,\mathrm{tr}\underset{\sim}{\varepsilon} + 2\mu\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \left(\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}\right)$$

λ, μ – stałe Lamé

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}\underset{\sim}{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\underset{\sim}{I}\,\mathrm{tr}\underset{\sim}{\sigma} \qquad \left(\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}\,\sigma_{kk}\right)$$

Stałe Lamé można wyrazić względem stałych technicznych E, ν

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\underset{\sim}{\sigma} - \frac{\nu}{E}\underset{\sim}{I}\,\mathrm{tr}\underset{\sim}{\sigma} \qquad \left(\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\,\sigma_{kk}\right)$$

$$\underset{\sim}{\sigma} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\underset{\sim}{I}\,\mathrm{tr}\underset{\sim}{\varepsilon} + \frac{E}{1+\nu}\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \left(\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}\right)$$

Bilans równań i niewiadomych ogólnego zagadnienia teorii sprężystości

Niewiadome:

- symetryczny tensor małych odkształceń $\underset{\sim}{\varepsilon}$
  → 6 składowych
- symetryczny tensor naprężeń Cauchy $\underset{\sim}{\sigma}$
  → 6 składowych
- wektor przemieszczeń $\underset{\sim}{u}$ → 3 składowe

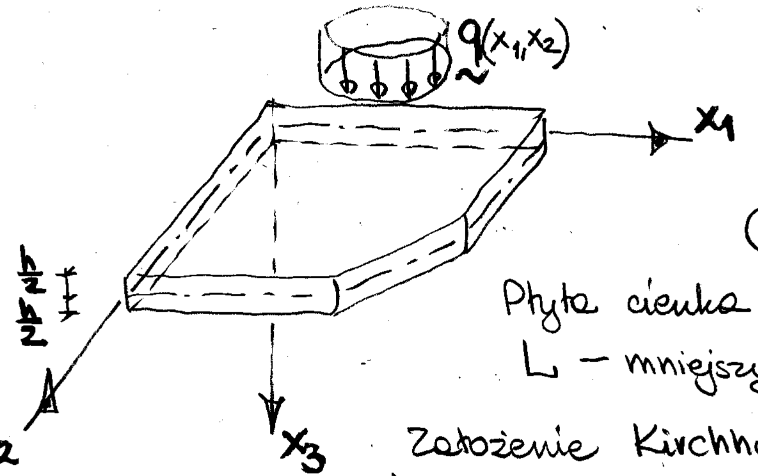
15

Równania:

- warunki równowagi $\mathrm{div}\underset{\sim}{\sigma}^T + \rho\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$
  → 3 równania
- związki kinematyczne $\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\underset{\sim}{u} + \nabla\underset{\sim}{u}^T)$
  → 6 równań
- relacje konstytutywne $\underset{\sim}{\sigma} = \lambda\underset{\sim}{I}\,\mathrm{tr}\underset{\sim}{\varepsilon} + 2\mu\underset{\sim}{\varepsilon}$
  → 6 równań

15

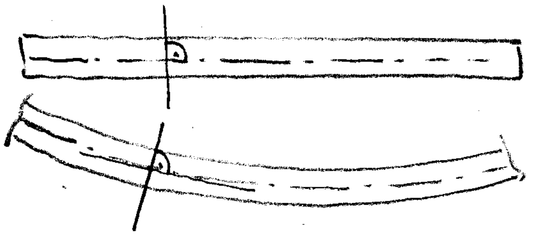
ELEMENTY TEORII PŁYT



Płyta – dźwigar powierzchniowy
Powierzchnia środkowa – płaszczyzna
Obciążenie – prostopadłe do pł. środkowej
(różnica w stosunku do tarczy)

Płyta cienka: $h \ll L$, praktycznie $h < \frac{L}{5}$
L – mniejszy wymiar w planie (Ox_1x_2)

Założenie Kirchhoffa: odcinek prostopadły do powierzchni środkowej płyty przed ugięciem jest również prostopadły do płaszczyzny stycznej do pow. środkowej po ugięciu



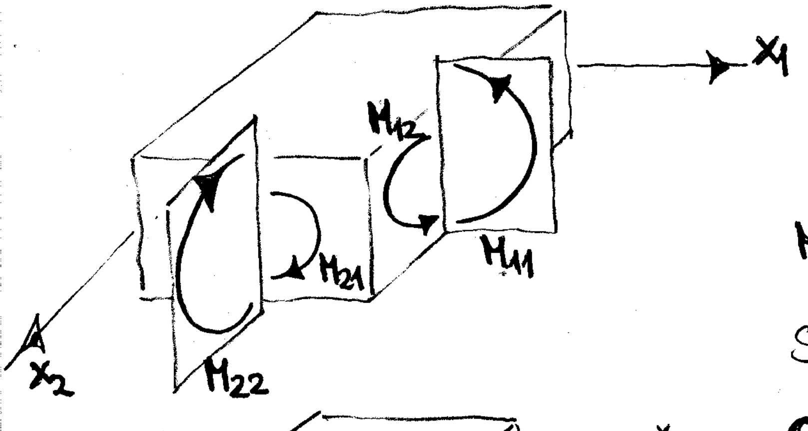
(analogia do założenia płaskich przekrojów w belkach)
Wektor przemieszczeń punktów powierzchni środkowej $\underset{\sim}{u} = \{u \ v \ w\}^T$ – największe znaczenie ma ugięcie $w = w(x_1, x_2)$

Z kompletu równań podstawowych teorii sprężystości (zw. kinematyczne, relacje konstytutywne, równania równowagi) wynika równanie różniczkowe płyty z niewiadomą funkcją $w(x_1,x_2)$:

$$\nabla^4 w = \Delta(\Delta w) = \frac{q(x_1,x_2)}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

rozwinięcie: $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \dfrac{q(x_1,x_2)}{D}$ lub $w_{,1111} + 2w_{,1122} + w_{,2222} = \dfrac{q(x_1,x_2)}{D}$

Siły przekrojowe w płytach – definicje (układ kartezjański)



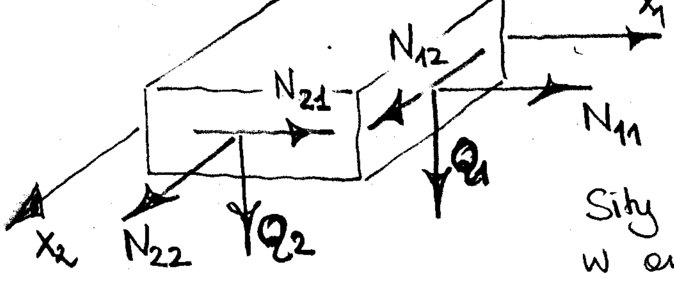
Momenty zginające i skręcające $\left[\frac{kNm}{m}\right]$

$$M_{11} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = -D\left(w_{,11} + \nu w_{,22}\right)$$

$$M_{22} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) = -D\left(w_{,22} + \nu w_{,11}\right)$$

$$M_{12} = M_{21} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = -(1-\nu)Dw_{,12}$$

Siły tnące (poprzeczne) $\left[\frac{kN}{m}\right]$



$$Q_1 = -D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nabla^2 w\right)$$

$$Q_2 = -D\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nabla^2 w\right)$$

Siły normalne i styczne $N_{11}, N_{22}, N_{12} = N_{21}$ w analizie płyt pomijane (stan tarczowy)

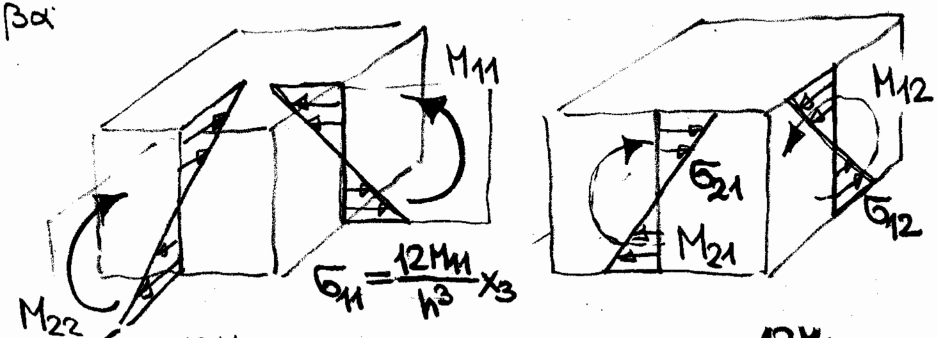
Definicje sił przekrojowych jako wypadkowych naprężeń:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} x_3 \, dx_3 = M_{\beta\alpha}$$

$$Q_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} \, dx_3$$

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} \, dx_3 = N_{\beta\alpha}$$

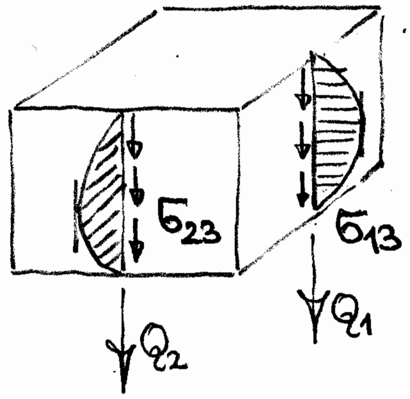
$\alpha, \beta = 1, 2$



$$\sigma_{11} = \frac{12 M_{11}}{h^3} x_3 \qquad \sigma_{22} = \frac{12 M_{22}}{h^3} x_3 \qquad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{12 M_{12}}{h^3} x_3$$

W płytach zachodzi

$$|\sigma_{i3}| \ll |\sigma_{\alpha\beta}| \quad, i = 1, 2, 3, \ \alpha, \beta = 1, 2$$



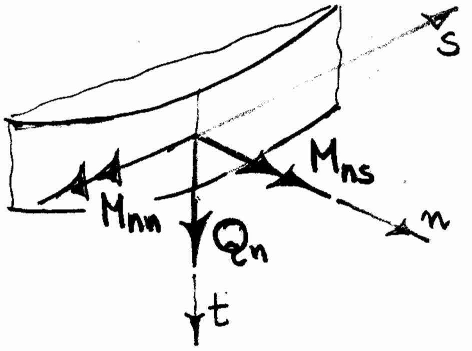
$$\max \sigma_{13} = \frac{3}{2} \frac{Q_1}{h}$$

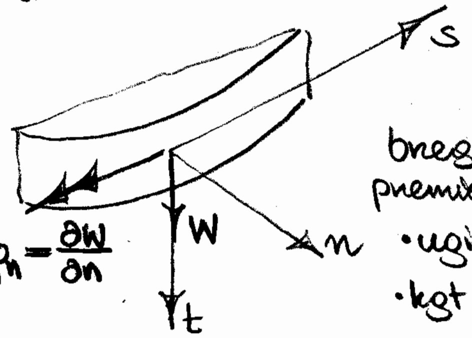
$$\max \sigma_{23} = \frac{3}{2} \frac{Q_2}{h}$$

Warunki brzegowe:

brzegowe wartości sił przekrojowych

M_{nn}, M_{ns}, Q_n





$$\varphi_n = \frac{\partial w}{\partial n}$$

brzegowe przemieszczenie:
- ugięcie w
- kąt obrotu φ_n

Występuje pięć brzegowych wielkości (statycznych i geometrycznych), zapisać można jedynie cztery warunki brzegowe – równanie czwartego rzędu.

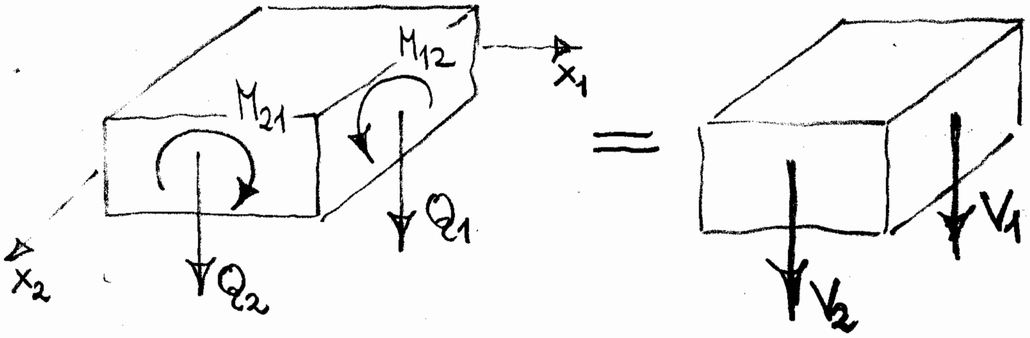
Zastępcza siła poprzeczna na brzegu: $$V_n \overset{def}{=} Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$$

(łączne działanie siły poprzecznej i momentu skręcającego)

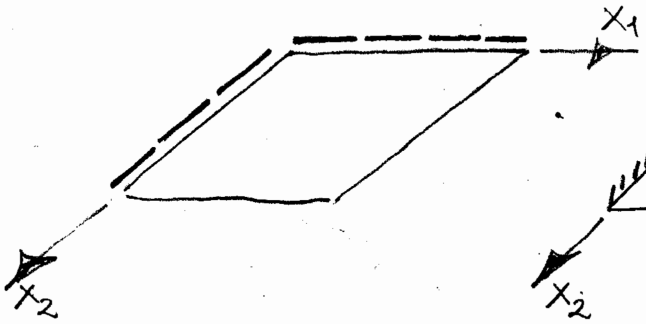
Szczegółowy zapis:

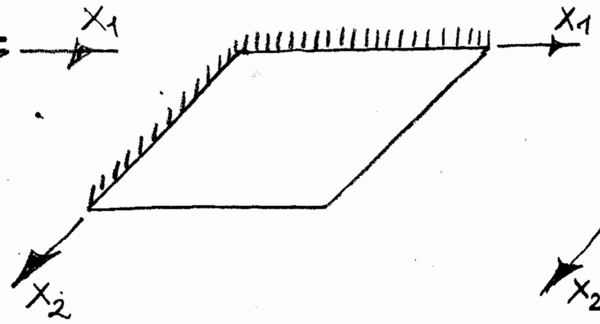
$$V_1 = Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}$$

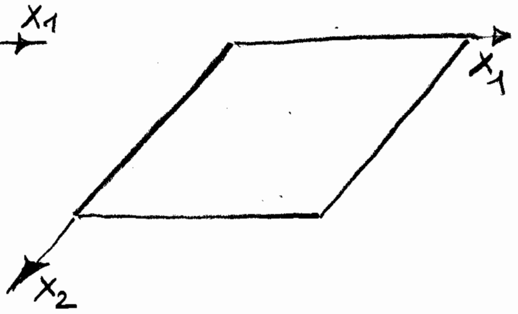
$$V_2 = Q_2 + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$



Sposoby podparcia płyt (warunki brzegowe) – układ kartezjański







swobodne podparcie

$$x_1=0:\begin{cases} w=0 \\ M_{11}=0 \Rightarrow w_{,11}=0 \end{cases}$$

$$x_2=0:\begin{cases} w=0 \\ M_{22}=0 \Rightarrow w_{,22}=0 \end{cases}$$

utwierdzenie

$$x_1=0:\begin{cases} w=0 \\ w_{,1}=0 \end{cases}$$

$$x_2=0:\begin{cases} w=0 \\ w_{,2}=0 \end{cases}$$

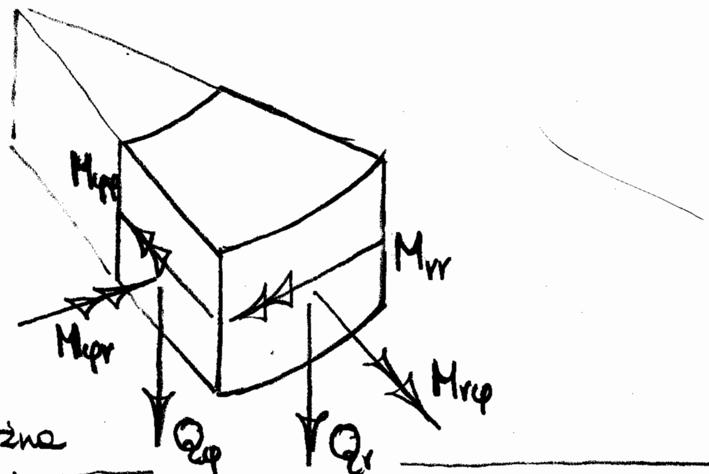
swobodny brzeg

$$x_1=0:\begin{cases} M_{11}=0 \\ V_1=0 \end{cases}$$

$$x_2=0:\begin{cases} M_{22}=0 \\ V_2=0 \end{cases}$$

RÓWNANIE TEORII PŁYT W UKŁADZIE BIEGUNOWYM

Siły wewnętrzne płytowe jako wypadkowe naprężeń w układzie biegunowym



M_{rr} – radialny moment zginający

$M_{\varphi\varphi}$ – obwodowy moment zginający

$M_{r\varphi}=M_{\varphi r}$ – momenty skręcające

Q_r, Q_φ – siły poprzeczne

Każdą z w.w. sił wewnętrznych wyrazić można względem pochodnych funkcji ugięć $w(r,\varphi)$

$$\boxed{\Delta(\Delta w)=\frac{q(r,\varphi)}{D}, \quad \Delta w = w_{,rr}+\frac{1}{r}w_{,r}+\frac{1}{r^2}w_{,\varphi\varphi}}$$

Przypadek obrotowej symetrii płyty $\rightarrow$ $w=w(r)$

Równanie różniczkowe płyty – równanie różniczkowe zwyczajne

zachodzi wtedy $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)$

stąd przy danym $q=q(r)$ możliwe bezpośrednie całkowanie

Siły wewnętrzne płytowe:
$$M_{rr}(r) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

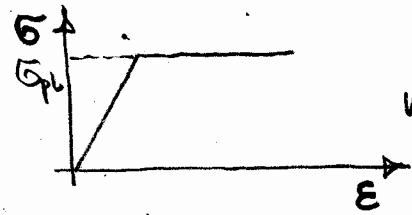
$$M_{\varphi\varphi}(r) = -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)$$

$M_{r\varphi}=M_{\varphi r}=0 \Rightarrow$ siła zastępcza $V_r = Q_r$

$$Q_r(r) = -D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

ELEMENTY TEORII PLASTYCZNOŚCI

Model materiału sprężystoplastycznego



Warunek plastyczności w jednoosiowym stanie naprężenia

$|\sigma| \leqslant \sigma_0$

$\sigma_0 \rightarrow \sigma_{pl}$ – granica plastyczności ew. σ_T (R_T lub R_e)

W stanach 2D i 3D ($\underset{\approx}{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$)

→ **Warunki plastyczności** (hipotezy wytrzymałościowe)

Ogólna postać warunku plastyczności: $F(\sigma_{ij}, \sigma_0) = 0$

– składowe stanu naprężenia zależne od wielkości stałej – materiał izotropowy i jednorodny, hipoteza jednoparametrowa → jedna wartość σ_0 dla materiału

Dwa wybrane warunki plastyczności

- **warunek Treski lub Treski-Guesta (TG)**

O granicy obszaru sprężystego (obszaru bezpiecznego) decyduje ekstremalne naprężenie styczne.

Przypomnienie: $\tau_{max} = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$

$$\tau_1 = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \quad \tau_2 = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2}, \quad \tau_3 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

W stanie jednoosiowego rozciągania / ściskania $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}$

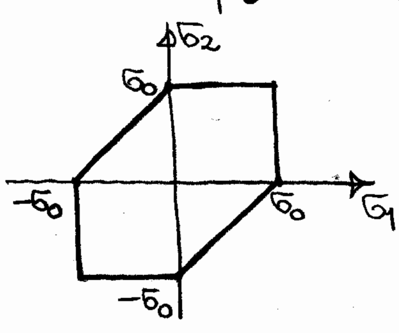
W układzie naprężeń głównych $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ warunki:

$$\begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_0 \\ |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_0 \\ |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_0 \end{cases}$$

(równość – powierzchnia graniczna, odpowiednie nierówności – obszar bezpieczny - sprężysty lub obszar niebezpieczny - plastyczny)

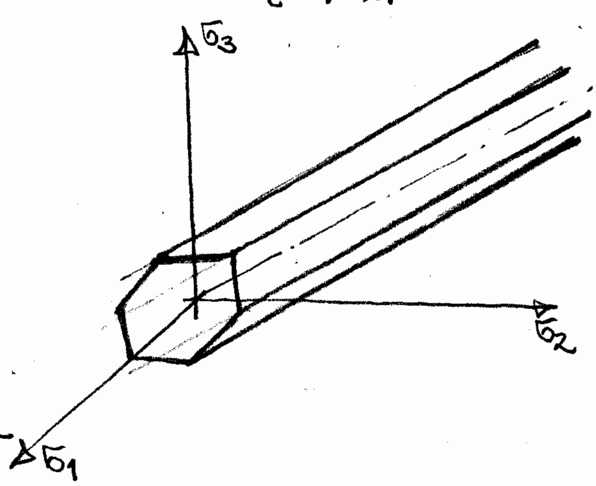
– sześć równań płaszczyzn w układzie przestrzennym $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

Płaski stan naprężenia (PSN) $(\sigma_3 = 0) \rightarrow \begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_0 \\ |\sigma_1| = \sigma_0 \\ |\sigma_2| = \sigma_0 \end{cases}$



W układzie przestrzennym – nieskończony graniastosłup prawidłowy sześciokątny o osi danej równaniem $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (jednakowo nachylonej do wszystkich osi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

sześciokąt PSN – przecięcie graniastosłupa płaszczyzną $\sigma_3 = 0$



- warunek **Hubera – von Misesa – Hencky** (H-M-H)

Granica obszaru bezpiecznego (stanu sprężystego) określona jest przez wartość energii właściwej odkształcenia postaciowego.

Energia ta jest funkcją składowych stanu naprężenia, możliwa do wyrażenia tak w układzie dowolnym jak i w układzie osi głównych

$$W_\gamma = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – naprężenia główne

W stanie jednoosiowym – rozciągania / ściskania naprężeniem σ_0, energia ta wynosi $W_\gamma = \frac{1}{12G}\cdot 2\sigma_0^2$

Z porównania uzyskujemy równanie powierzchni plastyczności (stanu granicznego) wg hipotezy H-M-H: $(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2)=2\sigma_0^2$

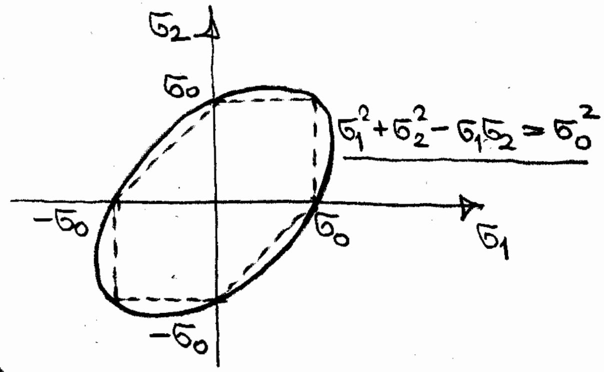
lub $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_0^2$

Płaski stan naprężenia (PSN), $\sigma_3=0$

– warunek $\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+3\sigma_{12}^2=\sigma_0^2$

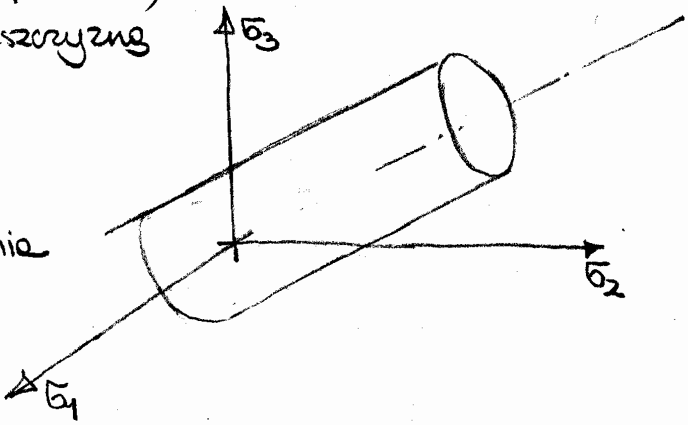
lub $\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2=\sigma_0^2$

(przypadek inżynierski – zginanie ze ścinaniem $\sigma_{11}\equiv\sigma$, $\tau_{12}\equiv\tau \Rightarrow \sigma^2+3\tau^2=\sigma_0^2$)



rys. powyżej, w układzie $O\sigma_1\sigma_2$ elipsa obrócona

W układzie przestrzennym – nieskończony walec kołowy o osi danej równaniem $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$, elipsa PSN – przecięcie walca płaszczyzną $\sigma_3=0$



* Porównać warunki uplastycznienia TG i H-M-H w stanie czystego ścinania

$$\underset{\sim}{\sigma}\equiv\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}0 & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \sigma_{12}>0$$

TG: naprężenia główne: $\sigma_1=\sigma_{12}$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-\sigma_{12}$

stąd $\tau_{max}=\frac{|\sigma_1-\sigma_3|}{2}=\sigma_{12}$. Warunek $\tau_{max}=\tau_0=\frac{\sigma_0}{2} \Rightarrow \sigma_{12}=\frac{\sigma_0}{2}$

H-M-H: $L=3\sigma_{12}^2 \qquad P=\sigma_0^2$

$L=P \Rightarrow \sigma_{12}=\sigma_0\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}577\sigma_0$