1.2. Funkcje i ich własności

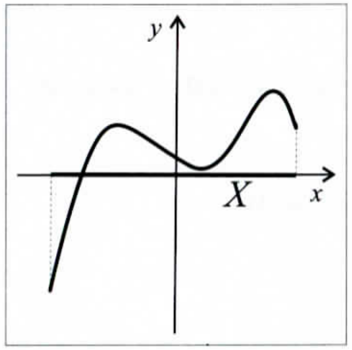
Definicja (*funkcji*)

Niech X i Y będą niepustymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jeżeli każdemu elementowi zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru Y, to mówimy, że zostało określone **odwzorowanie** zbioru X w zbiór Y. Zamiast „odwzorowanie" mówimy też: **przekształcenie** lub **funkcja** odwzorowująca zbiór X w zbiór Y i piszemy $f : X \to Y$.

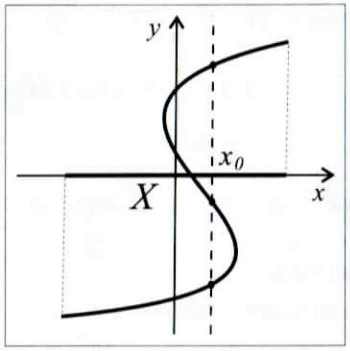
Funkcję zapisujemy zwykle w postaci:

$$y = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in X$$

Funkcję, dla której zbiory X i Y są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, nazywamy **funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej**.
Wykresem funkcji $y = f(x)$ nazywamy zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X, y = f(x)\}$.
Wykres funkcji $f : X \to Y$ ma następującą własność: każda prosta $x = x_0$, $x_0 \in X$ przecina wykres funkcji f dokładnie w jednym punkcie.



Wykres funkcji $f : X \to Y$



Krzywa niebędąca wykresem funkcji

Zbiór X, który często oznaczamy symbolem $\mathcal{D}_f$, nazywamy **dziedziną funkcji**, element $x \in X$ **argumentem funkcji**, element $y = f(x) \in Y$ **wartością funkcji**. Zbiór $\mathcal{W}_f = \{ y \in Y : y = f(x), x \in X \} \subset Y$ nazywamy **zbiorem wartości** lub **przeciwdziedziną funkcji**.
Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję (rzeczywistą zmiennej rzeczywistej), to zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których wzór ten ma sens, nazywamy **dziedziną naturalną funkcji**.
Dziedzina $\mathcal{D}_f$ funkcji f jest rzutem wykresu funkcji f na oś OX, a zbiór wartości $\mathcal{W}_f$ funkcji f jest rzutem wykresu funkcji f na oś OY.

Definicja (*funkcji ograniczonej, monotonicznej i okresowej*)
Niech $X, Y \subset \mathbb{R}$.

- Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją **ograniczoną**, jeżeli istnieją takie liczby rzeczywiste m, M, że dla każdego $x \in X$

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

- Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją **rosnącą** (**malejącą**), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ spełniających nierówność $x_1 < x_2$ zachodzi

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją **niemalejącą** (**nierosnącą**), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ spełniających nierówność $x_1 < x_2$ zachodzi

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

Funkcje rosnące, malejące, niemalejące, nierosnące obejmujemy wspólną nazwą funkcji **monotonicznych**. Funkcję malejącą lub rosnącą nazywamy funkcją **ściśle monotoniczną**.

- Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją **okresową**, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista $T \neq 0$, że dla dowolnego $x \in X$

$$x + T \in X \quad \wedge \quad f(x + T) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji** f. Najmniejszy dodatni okres, jeśli istnieje, nazywamy **okresem podstawowym**.

☞ **Uwaga**

Nie każda funkcja okresowa ma okres podstawowy. Na przykład funkcja stała $f(x) = c$, określona dla $x \in \mathbb{R}$, jest okresowa, przy czym jej okresem T jest każda liczba rzeczywista różna od zera ($f(x + T) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $T \neq 0$). Funkcja ta nie ma jednak okresu podstawowego, gdyż w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich nie ma liczby najmniejszej.

Przykład 1.22.
Niech funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone będą wzorami: $f(x) = x + 3$ oraz $g(x) = x^2 - 5$. Wyznaczyć złożenia $f \circ g$ i $g \circ f$.

Rozwiązanie
Dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 5) = (x^2 - 5) + 3 = x^2 - 2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2 - 5 = x^2 + 6x + 4$$

Zauważmy, że np. $(f \circ g)(0) = -2$ i $(g \circ f)(0) = 4$, więc $f \circ g \neq g \circ f$. Stąd wniosek, że składanie funkcji nie jest działaniem przemiennym.

☞ **Uwaga**

- Złożenie dwóch funkcji rosnących jest funkcją rosnącą.
- Złożenie dwóch funkcji malejących jest funkcją rosnącą.
- Złożenie funkcji rosnącej i funkcji malejącej jest funkcją malejącą.

Definicja (*funkcji różnowartościowej*)
Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją **różnowartościową (injekcją)**, jeżeli różnym argumentom przyporządkowuje ona różne wartości, tj. dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$

$$(x_1 \neq x_2) \implies (f(x_1) \neq f(x_2))$$

Funkcję różnowartościową będziemy oznaczać: $f : X \xrightarrow{1-1} Y$.

☞ **Uwaga**

- Złożenie dwóch funkcji różnowartościowych jest funkcją różnowartościową.
- Funkcja ściśle monotoniczna (rosnąca lub malejąca) jest funkcją różnowartościową.

Definicja (*funkcji „na”*)
Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją **„na” (surjekcją)**, jeżeli $\mathcal{W}_f = Y$, tzn. dowolny punkt $y \in Y$ jest wartością funkcji dla pewnego $x \in X$ $(y = f(x))$.
Funkcję „na” będziemy oznaczać: $f : X \xrightarrow{na} Y$.

Definicja (*funkcji wzajemnie jednoznacznej*)
Funkcję, która jest jednocześnie „1–1” i „na”, nazywamy funkcją **wzajemnie jednoznaczną (bijekcją)** i oznaczamy $f : X \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} Y$.

Definicja (*funkcji parzystej i nieparzystej*)
Niech $X, Y \subset \mathbb{R}$.

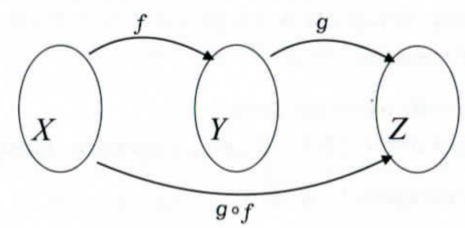
- Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją **parzystą**, jeżeli dla każdego $x \in X$

$$-x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = f(x)$$

- Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy funkcją **nieparzystą**, jeżeli dla każdego $x \in X$

$$-x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x)$$

Definicja (*funkcji złożonej*)
Złożeniem funkcji $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ nazywamy funkcję $h : X \to Z$ daną wzorem $h(x) = g(f(x))$.
Złożenie funkcji f i g oznaczamy symbolem $h = g \circ f$. Zatem dla każdego $x \in X$: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Funkcję f nazywamy funkcją **wewnętrzną**, a funkcję g – funkcją **zewnętrzną**.

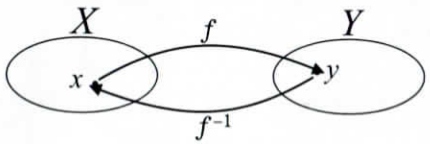


Definicja (*funkcji odwrotnej*)

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją wzajemnie jednoznaczną. Funkcję $f^{-1} : Y \to X$ nazywamy **funkcją odwrotną** do funkcji f, jeżeli dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Funkcję, dla której istnieje funkcja odwrotna, nazywamy funkcją **odwracalną**.



Zauważmy, że

$$f^{-1} \circ f = Id_X, \qquad \text{bo} \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

$$f \circ f^{-1} = Id_Y, \qquad \text{bo} \qquad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

gdzie Id_X oznacza funkcję identycznościową (przyporządkowującą elementowi $x \in X$ ten sam element), określoną w zbiorze X, a Id_Y – funkcję identycznościową, określoną w zbiorze Y.

☞ **Uwaga**

Wykres funkcji odwrotnej $y = f^{-1}(x)$ otrzymujemy z wykresu funkcji danej $y = f(x)$, odbijając go symetrycznie względem prostej $y = x$.
Wykresy funkcji danej $y = f(x)$ i odwrotnej $x = f^{-1}(y)$ pokrywają się.

Przykład 1.24.

Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = -4x + 5, x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Funkcja $f(x) = -4x + 5$ jest funkcją liniową malejącą, a więc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{W}_f = \mathbb{R}$ i f jest funkcją wzajemnie jednoznaczną. Zatem f^{-1} istnieje. Wyznaczmy wzór funkcji odwrotnej: