Z powyższego wynika, że $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdego $n \in N$, a więc $a_{n+1} > a_n$ dla każdego $n \in N$. To oznacza, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący.

Korzystając z definicji pokazać, że:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{4n+5} = \frac{3}{4}$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2\cdot 5^n}{2+3\cdot 5^n} = \frac{2}{3}$

Zbadać, które z ciągów $\{a_n\}$ są zbieżne, a które są rozbieżne:

4. $a_n = 5^n$ **5.** $a_n = (0,5)^n$ **6.** $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

7. $a_n = \frac{(n+1)!}{n!}$ **8.** $a_n = 8^{\frac{1}{n}}$ **9.** $a_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$

Zbadać monotoniczność ciągów:

10. $a_n = \frac{n^2+3}{n}$, $n > 1$ **11.** $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $n > 1$ **12.** $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2}$, $n > 1$

Obliczyć granice ciągów o wyrazie ogólnym a_n :

13. $a_n = \frac{2-\sqrt[n]{10}}{\sqrt[n]{n}+(\frac{3}{4})^n}$ **14.** $a_n = \frac{(2n+1)(2n-3)}{2n^2+3n+1}$

15. $a_n = \frac{n\sqrt{n}+3n+1}{n^2+2}$ **16.** $a_n = \frac{1-5n^3}{2+n^2}$

17. $a_n = \log(n^2+1) - 2\log n$ **18.** $a_n = \frac{1+\ln n}{n}$

19. $a_n = \frac{\sin n}{n}$ **20.** $a_n = n\sin\frac{2}{n}$

21. $a_n = \frac{2^{\sqrt{n+1}}}{2^{\sqrt{n}}}$ **22.** $a_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n+1}$

23. $a_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ **24.** $a_n = \sqrt{n^2+5n-1} - \sqrt{n^2+3}$

25. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+7n}-n}$ **26.** $a_n = n(2n - \sqrt{4n^2-3})$

27. $a_n = n\sqrt{2} - \sqrt{2n^2+3n}$ **28.** $a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2+1} - n$

29. $a_n = \sqrt[3]{n^3+3} - \sqrt[3]{n^3-3}$ **30.** $a_n = \frac{2^{2n+1}-3}{5-3\cdot 4^n}$

31. $a_n = \frac{2^n+1}{3^n-4}$ **32.** $a_n = \sqrt[n]{3^n+4^n}$

33. $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{6}{7}\right)^n}$ **34.** $a_n = \sqrt[n]{3^n+\pi^n+e^n}$

35. $a_n = \sqrt[n]{1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n}$

36. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ **37.** $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

38. $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ **39.** $a_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$

40. $a_n = \left(\frac{n+6}{n}\right)^{2n}$ **41.** $a_n = \left(\frac{n^2+4}{n^2}\right)^n$

42. $a_n = \left(\frac{2+n^2}{3+n^2}\right)^n$ **43.** $a_n = \left(\frac{n-2}{n+5}\right)^n$

44. $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$ **45.** $a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^{-2n}$

46. $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn+3}$ **47.** $a_n = n\ln\left(1+\frac{5}{n}\right)$

48. $a_n = \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

49. $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$ **50.** $a_n = (1+2+\cdots+n)\frac{1}{(n+1)^2}$

51. $a_n = \frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+2}}$

52. $a_n = \frac{3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+2}$

53. $a_n = \frac{n^5+(n+1)^5+(n+2)^5+\cdots+(n+100)^5}{n^5+100^5}$

54. $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$

55. $a_n = \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{2(n+1)^3}$

Obliczyć granice $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dla ciągów o wyrazie ogólnym a_n:

56. $a_n = \frac{n^7}{3^n}$ **57.** $a_n = \frac{n^n}{n!}$

58. $a_n = \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$ **59.** $a_n = \frac{(n!)^2}{n^{2n}}$

60. $a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$ **61.** $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!}$

W zadaniach 60–61 należy skorzystać ze wzorów:

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot (2n)$ $\qquad (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1).$

Obliczyć granice ciągów określonych wzorami rekurencyjnymi:

62. $a_1 = 2,\ 2a_{n+1} = -a_n + 3$ **63.** $a_1 = a,\ a_{n+1} = pa_n + q,\ |p| < 1$

Odpowiedzi

1. $|\frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4}| = \frac{19}{4(4n+5)} < \frac{19}{n}$, więc $\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta=\frac{19}{\epsilon}} \bigwedge_{n>\delta} |\frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4}| < \epsilon$

2. $|\frac{3}{n} - 0| = \frac{3}{n}$, więc $\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta=\frac{3}{\epsilon}} \bigwedge_{n>\delta} |\frac{3}{n} - 0| < \epsilon$

3. $|\frac{1+2\cdot 5^n}{2+3\cdot 5^n} - \frac{2}{3}| = \frac{1}{3(2+3\cdot 5^n)} < \frac{1}{5^n}$ więc $\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta=\log_5 \frac{1}{\epsilon}} \bigwedge_{n>\delta} |\frac{1+2\cdot 5^n}{2+3\cdot 5^n} - \frac{2}{3}| < \epsilon$

4. Rozbieżny **5.** Zbieżny **6.** Zbieżny
7. Rozbieżny **8.** Zbieżny **9.** Rozbieżny
10. Rosnący **11.** Malejący **12.** Malejący
13. 1 **14.** 2 **15.** 0
16. $-\infty$ **17.** 0 **18.** 0; $a_n = \frac{1}{n} + \ln \sqrt[n]{n}$
19. 0, bo $|\sin n| \le 1$ **20.** 2 **21.** 1
22. -1 **23.** 1 **24.** $\frac{5}{2}$
25. $\frac{2}{7}$ **26.** $\frac{3}{4}$ **27.** $\frac{-3\sqrt{2}}{4}$
28. $\frac{4}{3}$ **29.** 0 **30.** $-\frac{2}{3}$
31. 0 **32.** 4 **33.** $\frac{6}{7}$
34. π **35.** 2; $\sqrt[n]{2^n} < a_n < \sqrt[n]{n^2 2^n}$ **36.** e^{-1}
37. e^{-1} **38.** $e^{\frac{1}{2}}$ **39.** e^5

40. e^{12} **41.** 1 **42.** 1
43. e^{-7} **44.** e **45.** e^{-6}
46. e^{km} **47.** 5 **48.** 1
49. $\frac{4}{3}$ **50.** $\frac{1}{2}$ **51.** -1
52. $\frac{1}{3}$ **53.** 101 **54.** 1; $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
55. $\frac{1}{6}$, gdyż $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
56. $\frac{1}{3}$ **57.** e **58.** $\frac{5}{e}$
59. e^{-2} **60.** $\frac{1}{2}$ **61.** 0

62. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, gdyż $a_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{3}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right], n \ge 2$

63. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{q}{1-p}$, gdyż $a_n = a \cdot p^{n-1} + q\left(1 + p + \cdots + p^{n-2}\right), n \ge 2$

1.2. Funkcje jednej zmiennej

1.2.1. Wykresy funkcji

Sporządzić wykresy funkcji:

1. $y = x$ **2.** $y = x^2$
3. $y = x^3$ **4.** $y = \sqrt{x}$
5. $y = \frac{1}{x}$ **6.** $y = \sqrt[3]{x}$
7. $y = \log_2 x$ **8.** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
9. $y = 2^x$ **10.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
11. $y = \sin x$ **12.** $y = 2\sin x$
13. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **14.** $y = \sin 2x$
15. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ **16.** $y = \cos x$
17. $y = \cos\frac{x}{3}$ **18.** $y = \mathrm{tg} x$