$$= \frac{1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

Zatem

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{12}$$

Przykład 4.3.
Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{tg} 3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{\sin 5x - 4x}$

Rozwiązanie

a) Przekształcamy wyrażenia, korzystając z zależności, że $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ dla $t = 3x$. Stąd

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot \cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 3x}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 3x}{3\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}$$

b) W liczniku i mianowniku wyrażenia pod symbolem granicy wyłączamy przed nawias x. Stąd

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{\sin 5x - 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{\sin 7x}{x} + \frac{\sin 3x}{x}\right)}{x\left(\frac{\sin 5x}{x} - 4\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{7 \cdot \frac{\sin 7x}{7x} + 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} - 4} = \frac{7+3}{5-4} = 10$$

❑ Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 4.1. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+1}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{\frac{x^2-9}{3x^2+6}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{|2x-4|}{\sqrt{2x}+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \log_5 (\sin x + \cos x)$

Zadanie 4.2. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+x}$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-8x+15}$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{3x^2+10x+3}{x^2+2x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+x^2+3x+3}{x^2-2x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2-x-30}{x^3+5x^2-4x-20}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2-2x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{2-\sqrt{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-4x^2+5x}{(|x|+1)x}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+x^2-2}{x^4-3x^2+2}$

Zadanie 4.3. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-x-1}{1-\sqrt{-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+13}}{x^2-9}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt[3]{x+8}}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{1-\sqrt{1-3x}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1-\sqrt{1-2x-x^2}}{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x-4}-1}$

Zadanie 4.4. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x}{4x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin 6x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{4x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} 8x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} 4x \operatorname{ctg} 7x$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{8x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x}{\sin 5x+\sin 2x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{\sin 5x-\sin 4x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x+\sin 2x}{\sin 3x-5x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos x}{2x^2}$

n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{1-x^2}$

o) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-3x-4}{\sin(x-4)}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\operatorname{tg}^2 3x}$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$

t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 2x}{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos^2 x}}$

u) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\arcsin x}{5x}$

v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{x(1-\operatorname{tg} x)}{\cos 2x}$

w) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$

❑ Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 4.5. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(5x^3-4x^2+x-2)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-4x^2+x-2)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4+x^3+4)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+x^3+4)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x^2+x^4-x^6)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x^2+x^4-x^6)$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^5+2x^2-\frac{1}{x})$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1-\dfrac{1}{x+1})$

Zadanie 4.6. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-9x}{1+3x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-9x}{1+3x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x+4}{2x^2-3x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x+4}{2x^2-3x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+6x-1}{5-2x}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+6x-1}{5-2x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2}{x^2+4}-x\right)$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{12x^2+7x}{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+4}}{2x-3}$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+4}}{2x-3}$

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+2x-6}}{2-3x}$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+2x-6}}{2-3x}$

n) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{-x}$

o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{-x}$

Zadanie 4.7. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+2)(x+8)}-x)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1})$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+1}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+1})$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{e^{2x}+1}-\sqrt{e^{2x}-1})$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10^{\sqrt{x^2+2x+3}}}{10^{\sqrt{x^2+1}}}$

Zadanie 4.8. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x}{7x^2+4}\cos x$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos^2 x}{-x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x\sin x}{7x-x^7}$

Zadanie 4.9. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (7^x+6^x+5^x-4^x)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^{x+2}+4^x}{6^x-3^x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{x+1}-3^{x+2}}{3^{x-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x \cdot \dfrac{2^{x+1}-1}{3^{x+1}-1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\pi^{2x}+\pi^{-2x}}{\pi^{2x}-\pi^{-2x}}$

Zadanie 4.10. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2}{5}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{3x^4}{3x^4+8}\right)^{\frac{x^4}{5}}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x+3}{7x-5}\right)^{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2-2}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{3}}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(\ln(x+a)-\ln x)$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\ln\frac{x+1}{x}+\ln\frac{2x+3}{2x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{3}\ln\dfrac{2x}{2x+1}$

Zadanie 4.11. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(\operatorname{arctg} x)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2\left|\dfrac{x+1}{x^2+2}\right|$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+2)\operatorname{arctg} x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arccos\dfrac{2+x}{2-x}$

4.3. Granice jednostronne funkcji

Definicja (*Heinego granic jednostronnych*)

1. Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym lewostronnym sąsiedztwie $S_-(x_0, r)$.
   Liczbę g nazywamy **granicą lewostronną** właściwą (lub niewłaściwą) funkcji

Rozwiązanie

Obliczamy granice jednostronne funkcji w podanym punkcie:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x+1}{x^2+5x+4} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to-1^-} \frac{x+1}{(x+1)(x+4)} = \lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{3}$$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+10}-3} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \{$ mnożymy licznik i mianownik ułamka przez $(\sqrt{x+5}+2)(\sqrt{x+10}+3)\,\} = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)(\sqrt{x+10}+3)}{(\sqrt{x+10}-3)(\sqrt{x+10}+3)(\sqrt{x+5}+2)} =$

$$= \lim_{x\to-1^+} \frac{(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x\to-1^+} \frac{\sqrt{x+10}+3}{\sqrt{x+5}+2} = \frac{3}{2}$$

Stąd $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, zatem granica funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = -1$ nie istnieje.

❑ Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 4.12. Obliczyć granice jednostronne funkcji w podanych punktach.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x}$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{1-x}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-2x-3}$, $x_0 = -1$

d) $f(x) = \dfrac{4-2x^3}{3x-x^2-2}$, $x_0 = 2$

e) $f(x) = \dfrac{2-3x-x^2}{(x-2)^2}$, $x_0 = 2$

f) $f(x) = \dfrac{4x-3}{(5-x)^2}$, $x_0 = 5$

Zadanie 4.13. Obliczyć granice jednostronne funkcji w podanych punktach.

a) $f(x) = 2^{\frac{1}{(1-x)^2}}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2x-3}{7-x}}$, $x_0 = 7$

d) $f(x) = e^{\frac{\pi}{1-x}}$, $x_0 = 1$

e) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$, $x_1 = -1, x_2 = 1$

f) $f(x) = \dfrac{1}{4-2^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$

g) $f(x) = \dfrac{5^{\frac{1}{x}}}{1+5^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$

h) $f(x) = \dfrac{3^{-\frac{1}{x+1}}-1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+1}$, $x_0 = -1$

i) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+6}{6^{\frac{1}{x}}+2}$, $x_0 = 0$

j) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$

k) $f(x) = \dfrac{1-2x}{5+2^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0 = 1$

Zadanie 4.14. Obliczyć granice funkcji.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2} - e^{\frac{-1}{4-x^2}}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_3 \dfrac{2}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} x\dfrac{2x+1}{\ln x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2}x(x-1)}{|1-x|}$

f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\dfrac{-2}{1-x}$

Zadanie 4.15. Zbadać, czy istnieją poniższe granice. Jeśli tak, to obliczyć je.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{|x|}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1-x^2}{|x+1|}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x^2-9|}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(3-x)^3}{|x-3|}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x^2-1|}{\sqrt{2-x}-1}$

f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)^2|x^2-x-6|}{|x+2|^3}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2}{|x^2-4||x+2|}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{|\sin x|(\sqrt{x+9}-3)}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left|\dfrac{\operatorname{ctg}(x-\frac{\pi}{2})}{x(x-\frac{\pi}{2})}\right|$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2|x|}{3x}$

Zadanie 4.16. Zbadać, czy istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Jeżeli tak, to obliczyć tę granicę.

a) $x_0 = -1, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} & \text{dla} \quad x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{dla} \quad x > -1 \end{cases}$

b) $x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{dla} \quad x < 1 \\ \dfrac{1-x}{x+4} & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$

c) $x_0 = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 4 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

d) $x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2-7x+3}{4(x-1)} & \text{dla} \quad x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$

e) $x_0 = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{3(\cos x - \cos 2x)}{2x^2} & \text{dla} \quad x < 0 \\ \dfrac{\sin^2 3x}{4x^2} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$

A zatem

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow (1-a)^2 = 1 \Leftrightarrow 1-a = 1 \vee 1-a = -1 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2$$

Stąd dla wartości parametru $a \in \{0, 2\}$ funkcja jest ciągła dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

❑ Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 4.17. Zbadać ciągłość funkcji.

a) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{|4x-x^3|}$

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-x^3}{|x-1|}$

d) $f(x) = \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$

Zadanie 4.18. Zbadać ciągłość i naszkicować wykresy podanych funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+5x+6 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ -x-2 & \text{dla } x \in \langle -2, +\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2+x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x^2-1 & \text{dla } x \in \langle -1, 2) \\ \frac{1}{2}x+2 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2^x+3 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ (x-2)^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1-x-x^2 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1+\log(x+1) & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

Zadanie 4.19. Zbadać ciągłość funkcji. Określić rodzaje punktów nieciągłości, jeśli istnieją.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{dla } x < 1 \\ \ln x & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x\sqrt{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \\ -1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{1-x} & \text{dla } x < 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \\ 2^{\frac{1}{1-x}} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}(\ln x) & \text{dla } x > 0 \\ x-\pi & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & \text{dla } x < 0 \\ |x-1| & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x^2+4x-3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x+1 & \text{dla } 0 < x \leqslant 1 \\ \log x & \text{dla } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & \text{dla } x < -1 \\ \arcsin x & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \ln x + \frac{\pi}{2} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x+2}} & \text{dla } x < -2 \\ 0 & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{x^2-2x}{x-2} & \text{dla } x > 2. \end{cases}$

Zadanie 4.20. Wyznaczyć wartości parametrów tak, aby funkcje były ciągłe.

a) $f(x) = \begin{cases} 2^x+8 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ (x-a)^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4-(x+1)^2 & \text{dla } x < 2 \\ x+a & \text{dla } x \geqslant 2, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{1-x}, & \text{dla } x \neq 1 \\ 6k^2-k-5 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\sin x}{|x|}} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin|x|}{\sqrt{3x}}\right) & \text{dla } x < 0 \\ \frac{\pi}{2}(1-\sqrt{a^2-1}) & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1}{\pi}e^{\frac{x-1}{x^2}} - b & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 2x+\cos(a) & \text{dla } x < 1 \\ b^2 & \text{dla } x = 1 \\ 3\ln x + 3\sqrt[3]{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} m\dfrac{4-x^2}{\sqrt{x+6}-2} + \dfrac{\pi}{4} & \text{dla } x < -2 \\ \dfrac{x(x+1)}{2} + \operatorname{arctg} k & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{4}\operatorname{arcctg}(\pi + \ln x) & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{-x}{3-x} & \text{dla } x < 3 \\ 2k^2-3k+\pi & \text{dla } x = 3 \\ \pi + 2e^{-\frac{1}{(x-3)^2}} & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{dla } x \neq 3 \\ 2a-4 & \text{dla } x = 3 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{5x} & \text{dla } x \neq 0 \\ a^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^2\operatorname{arctg} 2x}{6x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 3 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} 2ax+6 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2-1}{1-x} & \text{dla } 1 < x < 2 \\ bx^2-1 & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

4.5. Zadania różne – łatwe i trudne

Zadanie 4.21. Obliczyć granice funkcji.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x^2-1}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin x}$

Odpowiedzi do zadań z rozdziału 4

4.1. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{9}$ c) 0 d) 0

4.2. a) 0 b) 5 c) 2 d) -1 e) $\frac{11}{129}$ f) -2 g) -4 h) 5 i) -1 j) -3

4.3. a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) -2 d) $\frac{1}{16}$ e) $-\frac{1}{12}$ f) $\frac{2}{9}$ g) 1 h) 20

4.4.
a) 4 b) 2 c) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{5}{4}$ f) $\frac{1}{8}$ g) $\frac{4}{7}$ h) $\frac{1}{2}$
i) 1 j) 10 k) -4 l) $\frac{1}{2}$
m) $-\frac{3}{4}$ n) $-\frac{1}{2}$ o) 5 p) $\frac{1}{12}$
q) $\frac{1}{36}$ r) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ s) 1 t) $4\sqrt{3}$
u) $\frac{3}{5}$ v) $\frac{\pi}{4}$ w) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4.5. a) ∞ b) $-\infty$ c) ∞ d) ∞ e) $-\infty$ f) $-\infty$ g) ∞ h) ∞

4.6.
a) -3 b) -3 c) 0
d) 0 e) $-\infty$ f) ∞
g) 1 h) $-11\frac{1}{2}$ i) -2
j) $\frac{1}{2}$ k) $-\frac{1}{2}$ l) -1
m) 1 n) -1 o) 1

4.7. a) 5 b) 0 c) $\frac{3}{2}$. d) 0 e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ f) 1 g) $-\frac{2}{3}$ h) 2 i) 0 j) 10

4.8. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0

4.9. a) 0 b) 0 c) -27 d) $\frac{2}{3}$ e) 1 f) -1

4.10. a) e^6 b) 0 c) e d) e^{-1} e) $e^{-\frac{8}{15}}$ f) ∞ g) 1 h) a i) ∞ j) $-\infty$

4.11. a) 1 b) $-\infty$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $-\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{2}$ f) π

4.12. Niech $L = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ i $P = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

a) $L = \infty, P = -\infty$
b) $L = \infty, P = -\infty$
c) $L = \infty, P = -\infty$
d) $L = -\infty, P = \infty$
e) $L = -\infty, P = -\infty$
f) $L = \infty, P = \infty$

4.13. Niech $L = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ i $P = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

a) $L = \infty, P = \infty$
b) $L = \infty, P = 0$
c) $L = 0, P = \infty$
d) $L = \infty, P = 0$
e) dla x_1: $L = 0, P = \infty$,
dla x_2: $L = \infty, P = 0$
f) $L = \frac{1}{4}, P = 0$
g) $L = 0, P = 1$
h) $L = 1, P = -1$
i) $L = 3, P = 0$
j) $L = 0, P = 0$
k) $L = -\frac{1}{5}, P = 0$

4.14. a) 0 b) ∞ c) $-\infty$ d) $-\frac{\pi}{4}$ e) $\sqrt{2}$ f) $-\frac{\pi}{2}$

4.15.
a) nie istnieje
b) nie istnieje
c) nie istnieje
d) 0
e) nie istnieje
f) 5
g) 0
h) nie istnieje
i) ∞
j) nie istnieje

4.16. a) 0 b) nie istnieje c) 0 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{9}{4}$ f) 4

4.17.
a) ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
b) ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
c) ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
d) ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

4.18.
a) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R}$
b) funkcja dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
c) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R}$
d) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R}$

4.19.
a) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R}$
b) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R}$
c) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R}$
d) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ – punkt nieciągłości I rodzaju
e) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x = 1$ – punkt nieciągłości I rodzaju
f) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ – punkt nieciągłości I rodzaju
g) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ – punkt nieciągłości I rodzaju
h) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ – punkt nieciągłości I rodzaju
i) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ – punkt nieciągłości I rodzaju
j) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ – punkt nieciągłości I rodzaju
k) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R}$
l) funkcja ciągła dla $x \in \mathbb{R}$

4.20.
a) $a \in \{-3, 3\}$
b) $a = -7$
c) $k \in \{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$
d) Nie istnieje taka wartość parametru a, żeby funkcja była ciągła, tj. $a \in \emptyset$.
e) $a \in \{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\}$ oraz $b = \frac{\pi}{6}$
f) $a = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ oraz $b \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
g) $k = 0$ oraz $m = \frac{1}{8}(1 - \frac{\pi}{4})$
h) Nie istnieje taka wartość parametru k, żeby funkcja $f(x)$ była ciągła, tj. $k \in \emptyset$.
i) $a = 5$
j) $a \in \{-\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\}$
k) $a \in \{-3, 3\}$
l) $a \in \{-4, -\frac{1}{2}\}$