POLITECHNIKA GDAŃSKA

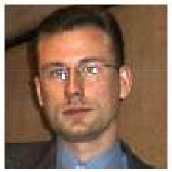
Świat obrazów cyfrowych

Przekształcenia geometryczne obrazów

Mariusz Kaczmarek
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Katedra Inżynierii Biomedycznej

Świat obrazów cyfrowych

Jacek Rumiński



Mariusz Kaczmarek

Katedra Inżynierii Biomedycznej,
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska

Przekształcenia geometryczne obrazów; operacja interpolacji

Plan prezentacji

1. Odbicie lustrzane obrazu.
2. Skalowanie (pomniejszanie, powiększanie).
3. Obroty o wielokrotność kąta 90^0 i o dowolny kąt.
4. Zniekształcenia inne - morfing.
5. Przykład zastosowania przekształceń do rejestracji obrazów różnych modalności.

Przekształcenia geometryczne

Przekształcenia geometryczne są stosowane do przestrzennego dopasowania obrazów uzyskanych w różnym czasie lub z różnych źródeł. Brak odpowiedniego dopasowania może skutkować w pogorszeniu ich jakości ze względu na utratę ważnych lub interesujących informacji.

Zastosujemy je również do dopasowania rozmiaru obrazu do rozmiarów wyświetlacza czy druku. Odrębnym zagadnieniem jest uzyskiwanie efektów specjalnych (zniekształceń geometrycznych).

Operacje geometryczne - w których położenie piksela (i, j) zmieniane jest zgodnie z zadaną relacją matematyczną, a jego intensywność zasadniczo nie ulega zmianie.

Przekształcenia geometryczne

Istnieją różne formy przekształceń. Zasadniczo można je podzielić na metody transformacji sztywnych (rigid transform) oraz elastycznych (non-rigid transform).

Transformacje sztywne:
zachowują linie proste, ich równoległość oraz kąty.

Transformacje elastyczne:
nie zachowują jednej lub wielu z tych własności.

Popularną rodzinę transformacji stanowią transformacje afiniczne. Transformacja tego typu zachowuje linie proste oraz ich równoległość.

Układ równań tej transformacji może być zapisany jako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

gdzie:
A_{nn}, t_n – parametry transformacji.

Przesunięcie obrazu

Najprostszym przekształceniem geometrycznym jest przesunięcie obrazu. Przesunięcie polega na zmianie współrzędnych każdego piksela obrazu o stałą zadaną wartość, zgodnie z zależnością:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

co jest równoznaczne z zapisem:

$$x' = x_0 + t_0$$

$$y' = y_0 + t_1$$

gdzie:
x_0, y_0 - współrzędne piksela oryginalnego obrazu;
t_0, t_1 – wartości przesunięcie pikseli obrazu odpowiednio w kierunku x oraz y;
x' , y' – nowe współrzędne piksela po przesunięciu.

Przesunięcie obrazu

przesunięcie

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9
c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9
d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9
e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9
g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8	g9
h1	h2	h3	h4	h5	h6	h7	h8	h9

obraz oryginalny

$$x' = x_0 + 1$$

$$y' = y_0 + 2$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
0	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8
0	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8
0	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8
0	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8

obraz po przekształceniu

Rozmiar płótna pozostaje bez zmian.
Puste piksele powstałe po przesunięciu wypełniamy zerami.

Przesunięcie obrazu

przesunięcie

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9
c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9
d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9
e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9
g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8	g9
h1	h2	h3	h4	h5	h6	h7	h8	h9

obraz oryginalny

$$x' = x_0 + 1$$

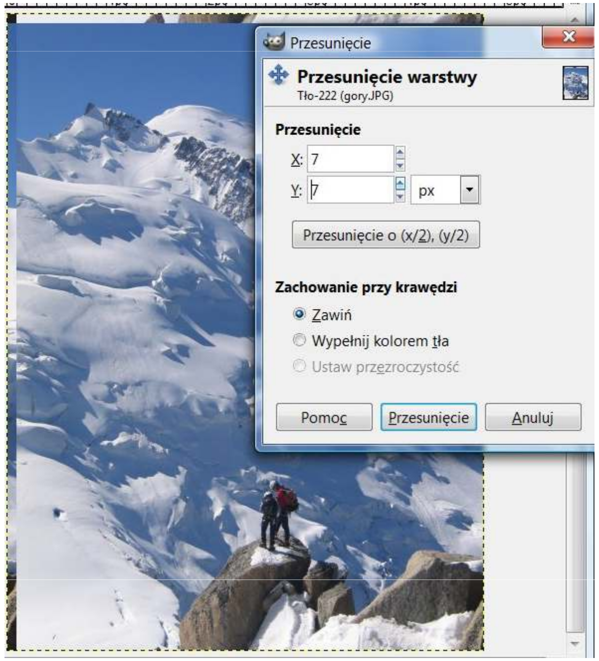
$$y' = y_0 + 2$$

g9	g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8
h9	h1	h2	h3	h4	h5	h6	h7	h8
a9	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
b9	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8
c9	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8
d9	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8
e9	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
f9	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8

obraz po przekształceniu

Rozmiar płótna pozostaje bez zmian.
Puste piksele powstałe po przesunięciu wypełniamy wartościami pikseli przesuniętych (zawijamy płótno).

Przesunięcie obrazu



Odbicie lustrzane (symetryczne)

Odbicie poziome (x):

$$X' = \left(X_{\max res} - 1\right) - X_0$$

Odbicie pionowe (y):

$$Y' = \left(Y_{\max res} - 1\right) - Y_0$$

odbicie (x)

a9	a8	a7	a6	a5	a4	a3	a2	a1
b9	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1
c9	c8	c7	c6	c5	c4	c3	c2	c1
d9	d8	d7	d6	d5	d4	d3	d2	d1
e9	e8	e7	e6	e5	e4	e3	e2	e1
f9	f8	f7	f6	f5	f4	f3	f2	f1
g9	g8	g7	g6	g5	g4	g3	g2	g1
h9	h8	h7	h6	h5	h4	h3	h2	h1

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9
c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9
d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9
e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9
g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8	g9
h1	h2	h3	h4	h5	h6	h7	h8	h9

odbicie (y)

h1	h2	h3	h4	h5	h6	h7	h8	h9
g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8	g9
f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9
e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9
c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9
b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9
a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9

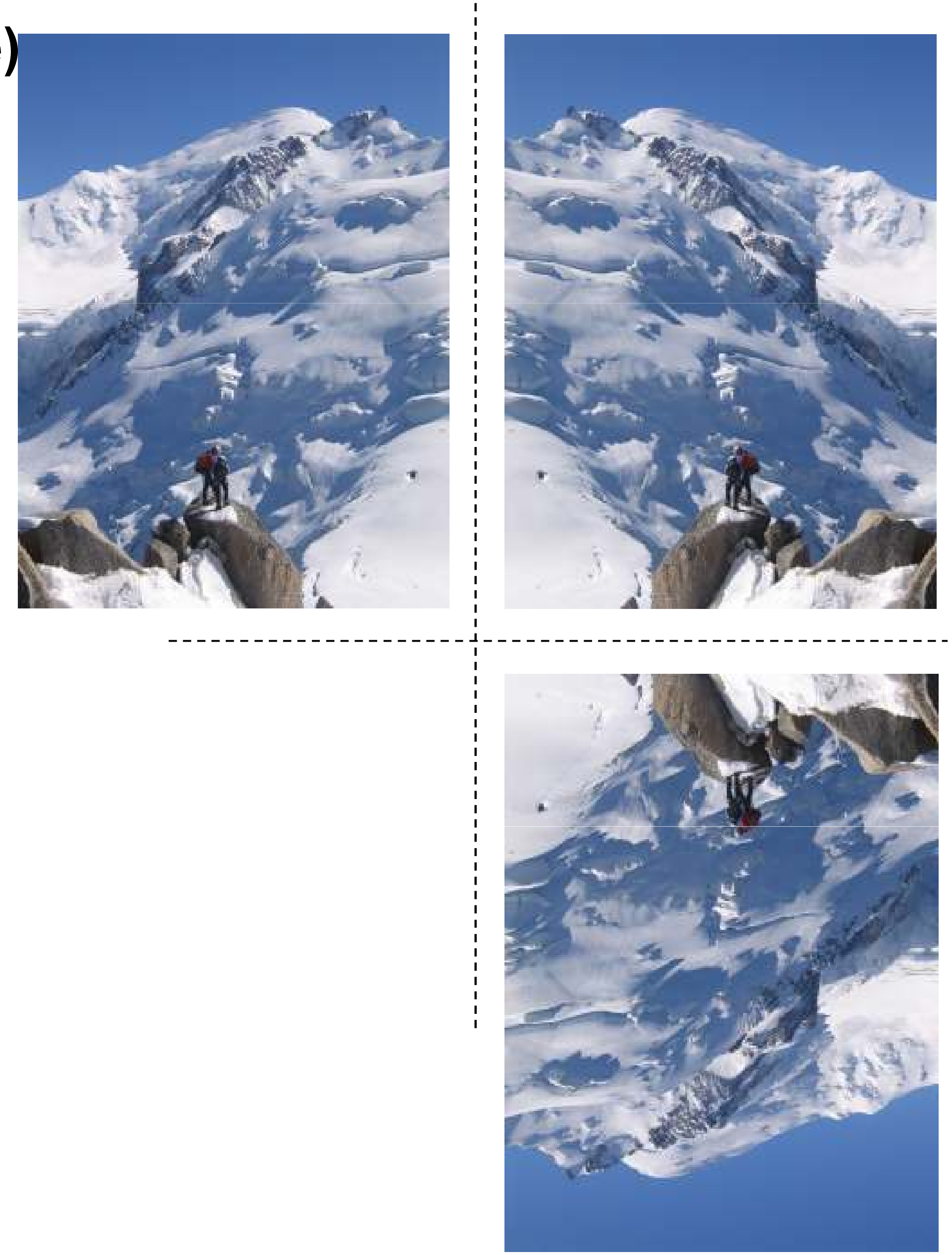
Odbicie lustrzane (symetryczne)

Odbicie poziome (x):

$$X' = (X_{\max res} - 1) - X_0$$

Odbicie pionowe (y):

$$Y' = (Y_{\max res} - 1) - Y_0$$



Skalowanie

Innym ważnym przekształceniem geometrycznym obrazu jest skalowanie obrazu. Skalowanie polega na zmianie rozmiarów oryginalnego obrazu – powiększenie lub zmniejszenie docelowych rozmiarów po przekształceniu. Zatem skalowanie odbywa się przez wymnożenie współrzędnych pikseli obrazu oryginalnego przez tzw. współczynnik skalowania (skali), zgodnie z zależnością:

$$x' = x_0 \cdot A_{00}$$

$$y' = y_0 \cdot A_{11}$$

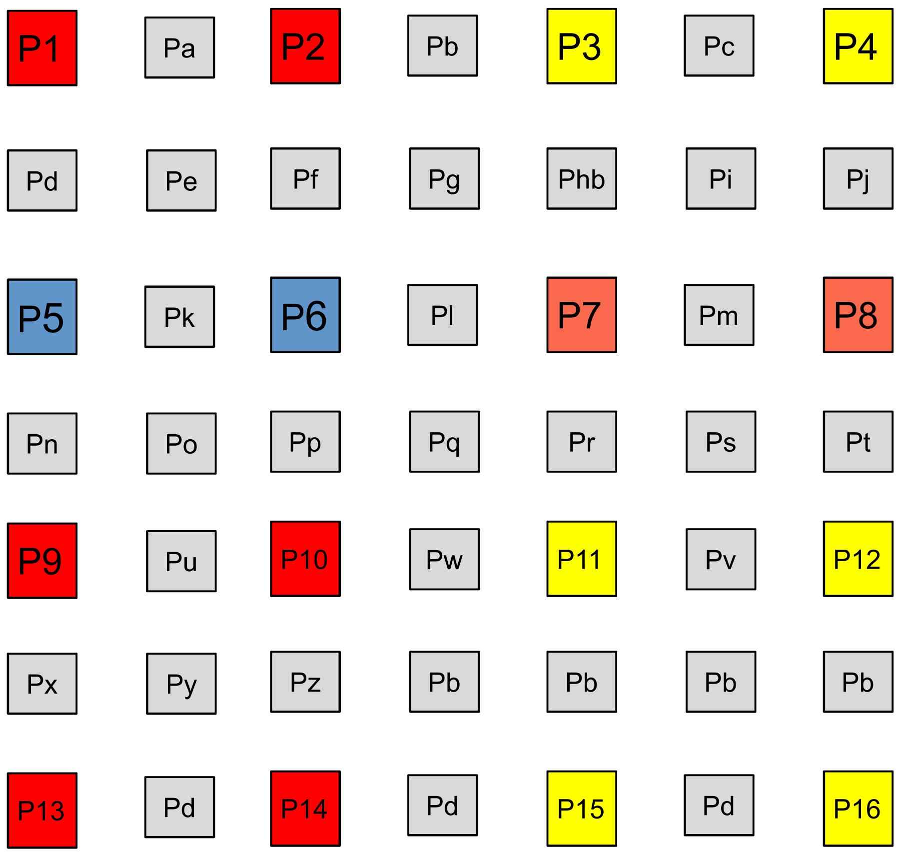
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

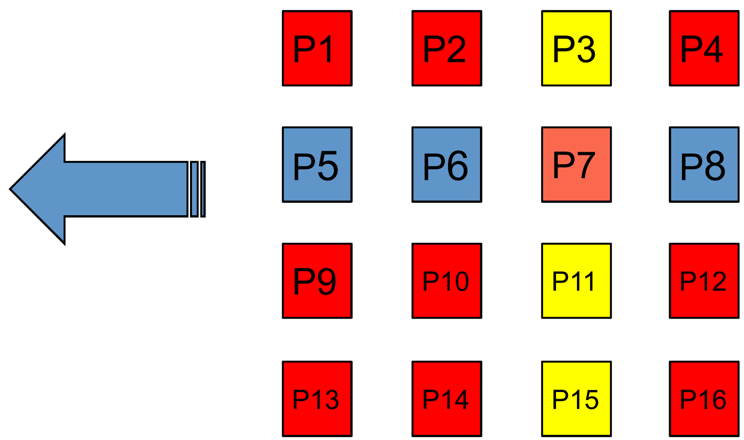
gdzie:
x_0, y_0 - współrzędne piksela oryginalnego obrazu;
A_{00}, A_{11} – wartości przesunięcie pikseli obrazu odpowiednio w kierunku x oraz y;
x' , y' – nowe współrzędne piksela po przesunięciu.

Skalowanie - Interpolacja

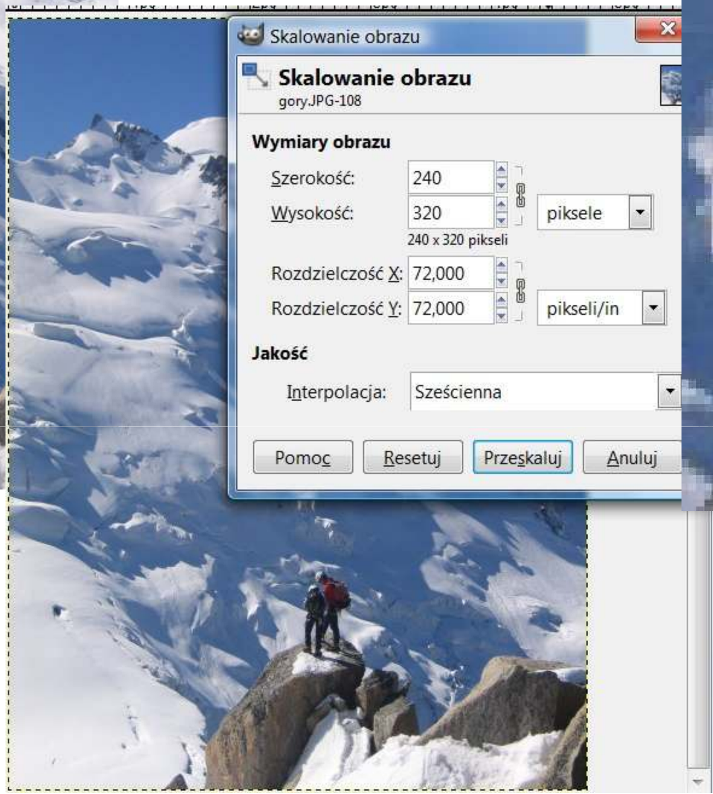
Interpolacja przyda nam się np. w przypadku powiększenia obrazu. Załóżmy, że powiększamy obraz dwukrotnie w obu kierunkach:

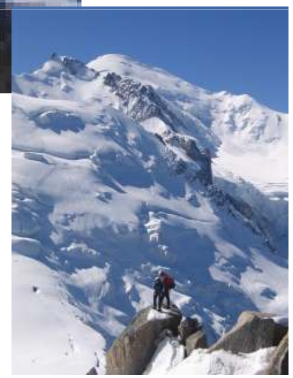
Na diagramie mamy fragment powiększonego obrazu. Kolorowe kwadraty to piksele oryginalnego obrazu, szare to nowe piksele, których wartość trzeba wyznaczyć, czyli interpolować.





Skalowanie


Skalowanie obrazu
Skalowanie obrazu
gory.JPG-108
Wymiary obrazu
Szerokość: 240
Wysokość: 320
piksele
240 x 320 pikseli
Rozdzielczość X: 72,000
Rozdzielczość Y: 72,000
pikseli/in
Jakość
Interpolacja: Sześcienna
Pomoc
Resetuj
Przeskaluj
Anuluj



Obrót

Obrót jest znacznie bardziej złożonym przekształceniem od dotychczas omówionych. Wykorzystuje, bowiem interpolację i korekcję współczynnika kształtu obrazu. Poniżej podane są równania reprezentujące obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt φ.

$$x' = (x_0) \cdot \cos(\varphi) - (y_0) \cdot \sin(\varphi)$$

$$y' = (x_0) \cdot \sin(\varphi) + (y_0) \cdot \cos(\varphi)$$

gdzie:
x_0, y_0 - współrzędne piksela oryginalnego obrazu;
φ – kąt obrotu;
x' , y' – nowe współrzędne piksela po przesunięciu.

Obrót wokół dowolnego punktu P(a,b):

$$x' = a + (x_0 - a) \cdot \cos(\varphi) - (y_0 - b) \cdot \sin(\varphi)$$

$$y' = b + (x_0 - a) \cdot \sin(\varphi) + (y_0 - b) \cdot \cos(\varphi)$$

Obrót

Obrót jest znacznie bardziej złożonym przekształceniem od dotychczas omówionych. Wykorzystuje, bowiem interpolację i korekcję współczynnika kształtu obrazu. Poniżej podane są równania reprezentujące obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt φ.

$$x' = (x_0) \cdot \cos(\varphi) - (y_0) \cdot \sin(\varphi)$$

$$y' = (x_0) \cdot \sin(\varphi) + (y_0) \cdot \cos(\varphi)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie:
x_0, y_0 - współrzędne piksela oryginalnego obrazu;
φ – kąt obrotu;
x' , y' – nowe współrzędne piksela po przesunięciu.

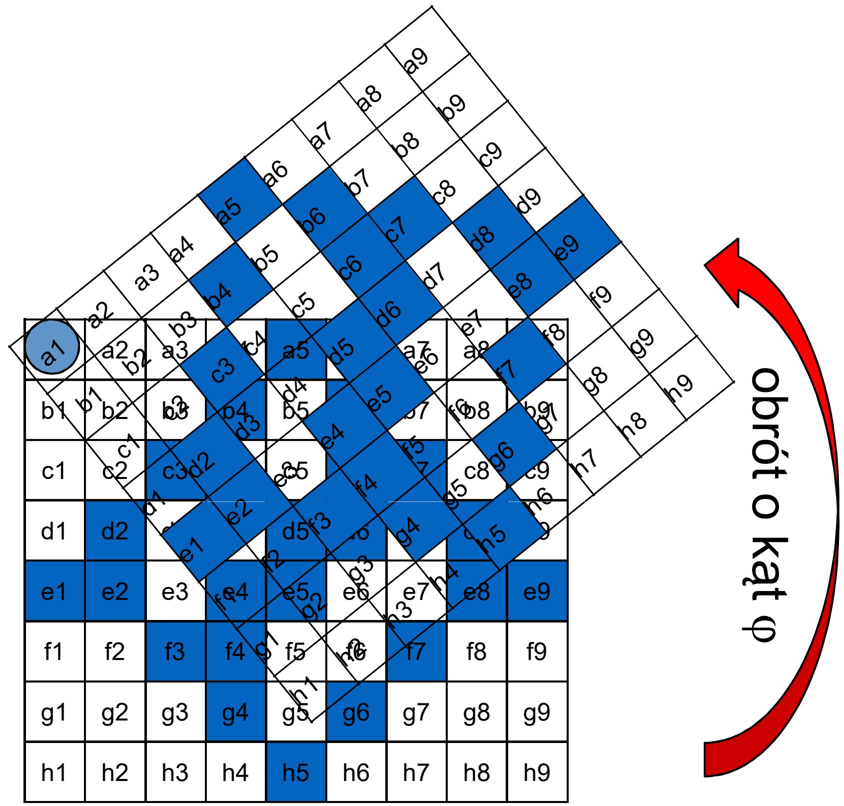
Obrót

Obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt φ.

$$x' = (\ x_0\ )\cdot\cos(\varphi) - (\ y_0\ )\cdot\sin(\varphi)$$

$$y' = (\ x_0\ )\cdot\sin(\varphi) + (\ y_0\ )\cdot\cos(\varphi)$$

Środkiem obrotu (punktem niezmiennym) pozostaje punkt a1 (początek układu współrzędnych).



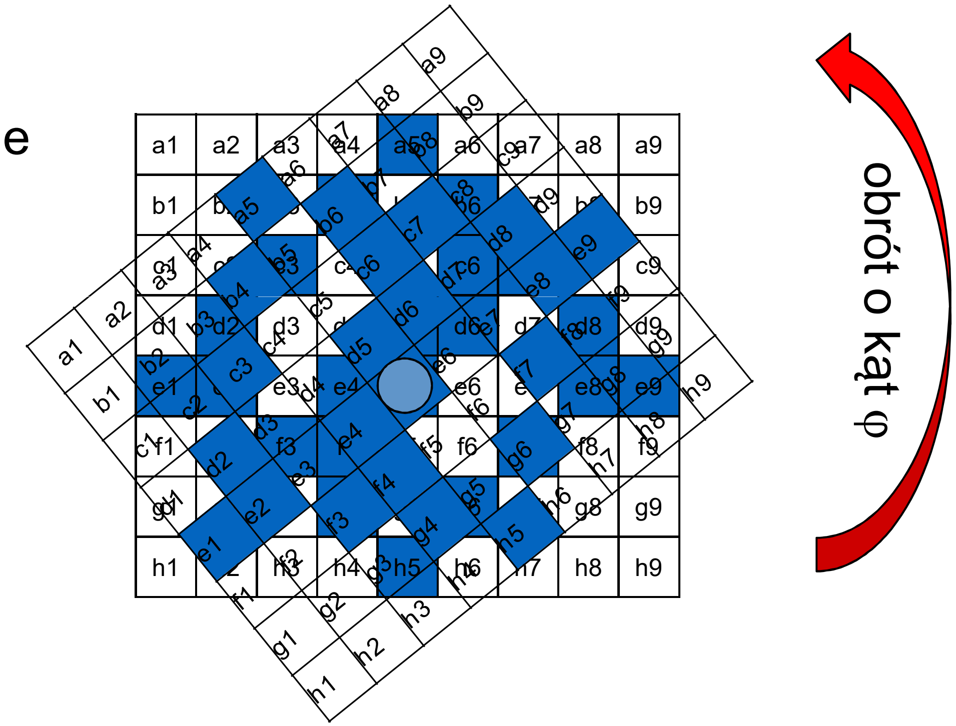
Obrót

Obrót wokół punktu P(a, b) o kąt φ.

$$x' = a + (x_0 - a)\cdot\cos(\varphi) - (y_0 - b)\cdot\sin(\varphi)$$

$$y' = b + (x_0 - a)\cdot\sin(\varphi) + (y_0 - b)\cdot\cos(\varphi)$$

Środkiem obrotu (punktem niezmiennym) pozostaje punkt e5 (czyli: P(4,4)).

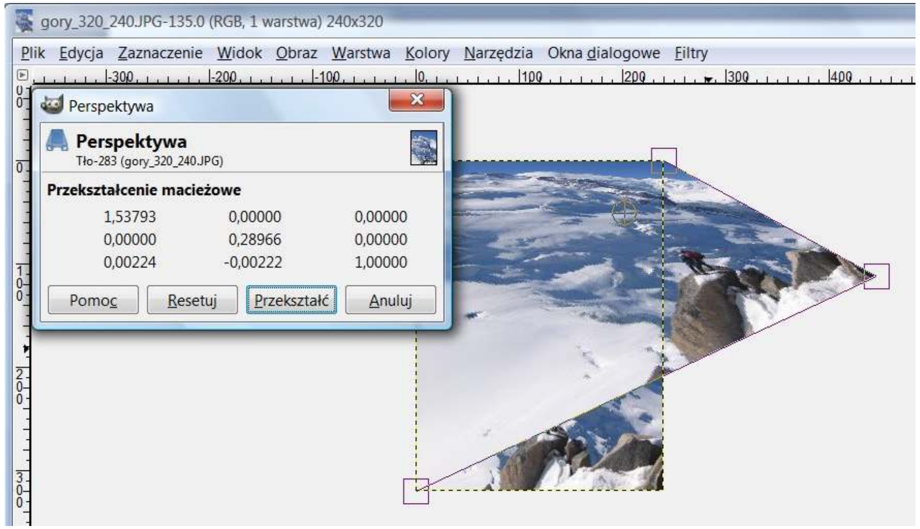


Obrót


Obrót
Obrót
Tło-253 (gory_320_240.JPG)
Kąt: 31,10
Środek X: 120,00
Środek Y: 160,00
px
Pomoc
Resetuj
Obróć
Anuluj

Przekształcenia perspektywiczne

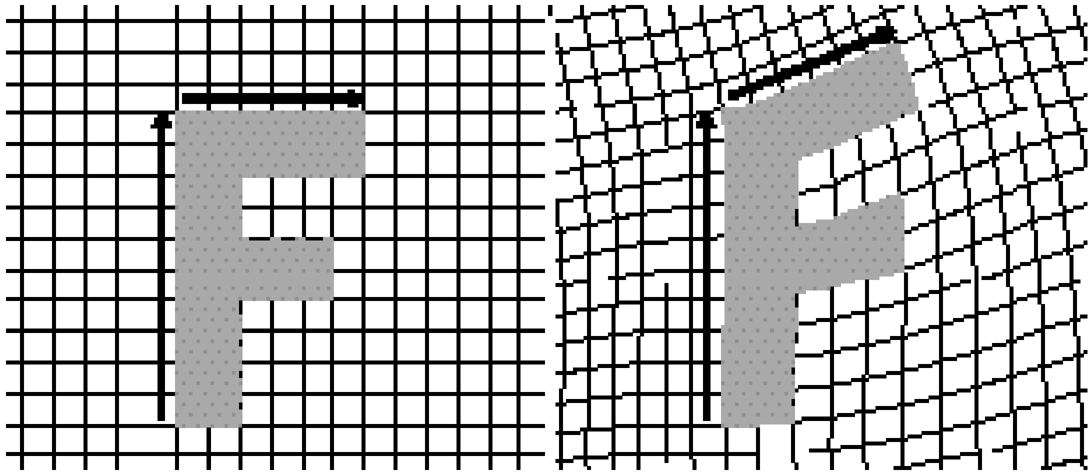
Przekształcenia macierzowe.



Przekształcenia morfingowe

Lokalne przekształcenia geometryczne poddają transformacji nie cały obraz (jak to ma miejsce dla globalnych transformacji), ale tylko jego część.

Do transformacji lokalnych należą między innymi triangulacje Delaunay oraz transformacja morfingowa (bazująca na morfingu obrazów).



Przekształcenia morfingowe

Lokalne przekształcenia geometryczne poddają transformacji nie cały obraz (jak to ma miejsce dla globalnych transformacji), ale tylko jego część.

Do transformacji lokalnych należą między innymi triangulacje Delaunay oraz transformacja morfingowa (bazująca na morfingu obrazów).

Kolejne wersje przekształcanego obrazu oryginalnego

Przekształcenia morfingowe

Potrzebujemy pierwszą klatkę (startową) oraz ostatnią, czyli tą na której skończy się transformacja – są to nasze wzorce na bazie których opracujemy zestaw przekształceń.

pierwsza klatka

Musimy znaleźć przepis jak zmieniają się położenia punktów w obrazie oraz jak zmienia się ich kolor, czyli modelujemy zmiany współrzędnych oraz zmiany(przenikanie) koloru.

ostatnia klatka

Kolejne wersje przekształcanego obrazu oryginalnego

Przekształcenia morfingowe

Matematyczny opis przekształceń jest skomplikowany, więc nie będziemy do tu przytaczać.

Warto jednak zapoznać się z przykładami przekształceń morfingowych:

https://www.google.pl/search?q=picture+morphing&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwj217qnzNjTAhUJDcAKHYfZBY8QsAQINw&biw=1920&bih=979

http://www.morphthing.com/

http://faceonface.net/en/morph

https://en.wikipedia.org/wiki/Morphing

Rejestracja (dopasowanie) obrazów z różnych źródeł (różnych modalności)

Ciekawą formą wizualizacji danych jest konstrukcja obrazu multimodalnego wykorzystującego obrazy tego samego obiektu otrzymane różnymi technikami, np. RTK, NMR, PET.

W celu stworzenia obrazu multimodalnego konieczna jest rejestracja obrazów
składowych do wspólnego układu współrzędnych. Proces taki przebiega zawsze kilkuetapowo.

Po pierwsze należy wybrać układ współrzędnych docelowych (np. zdjęcie CT). Po drugie należy zdefiniować odpowiednią ilość punktów kontrolnych obrazu (Control Points - CP).

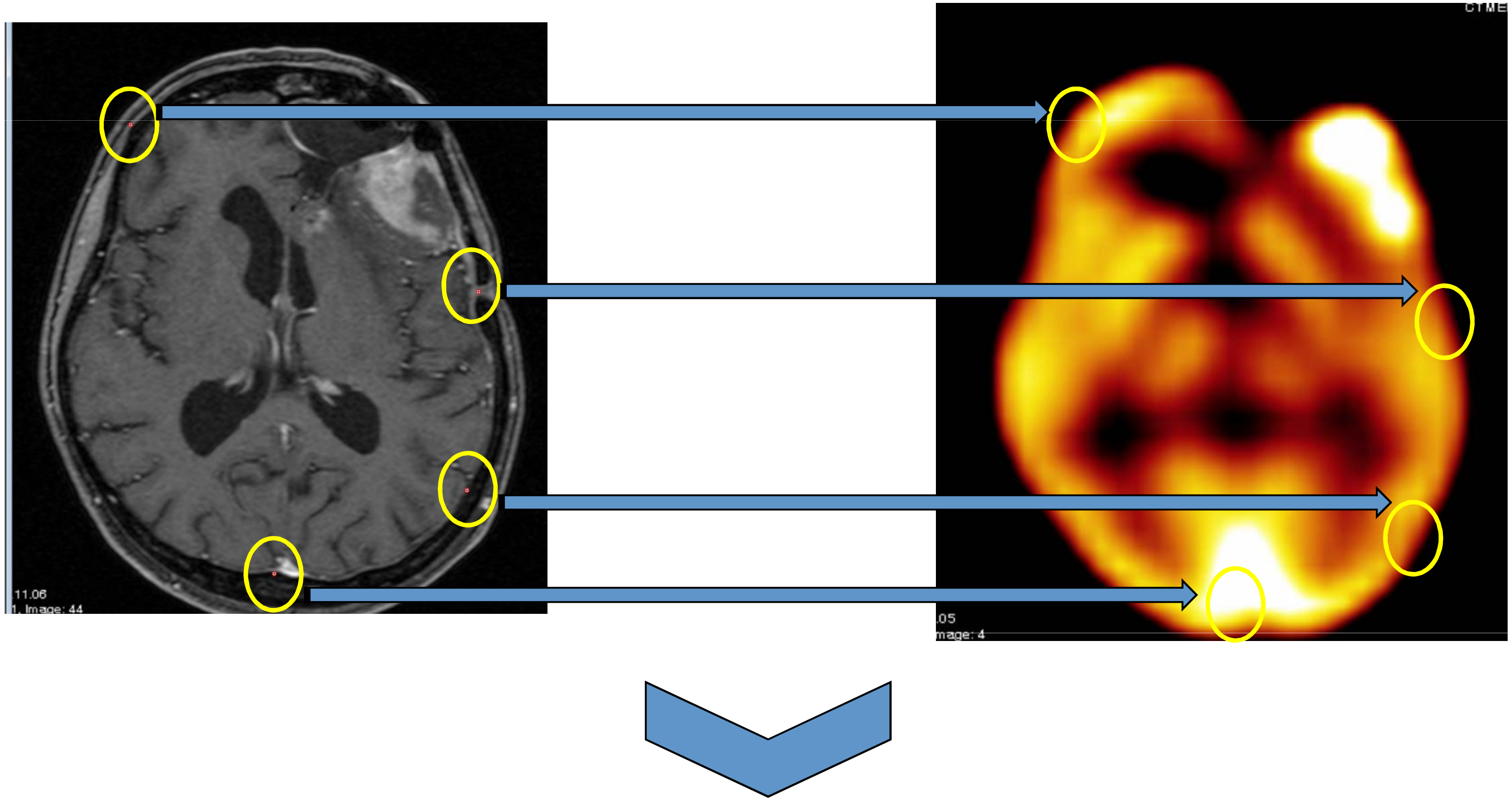
Punkty kontrolne to współrzędne (zgodne z przyjętym układem współrzędnych) określonego obiektu, występującego na zdjęciu. Punkty te mogą być wyznaczane w oparciu o stosowane sztucznie znaczniki (markery) lub w oparciu o właściwości obrazów (ich budowę).

Rejestracja (dopasowanie) obrazów z różnych źródeł (różnych modalności)

Trzecim krokiem procesu jest wybór odpowiedniej metody przekształcenia obrazu i przetestowanie jej. Ostatnim krokiem jest stworzenie skorygowanego obrazu oraz jego przepróbkowanie według wybranej metody (najczęściej poprzez interpolację).

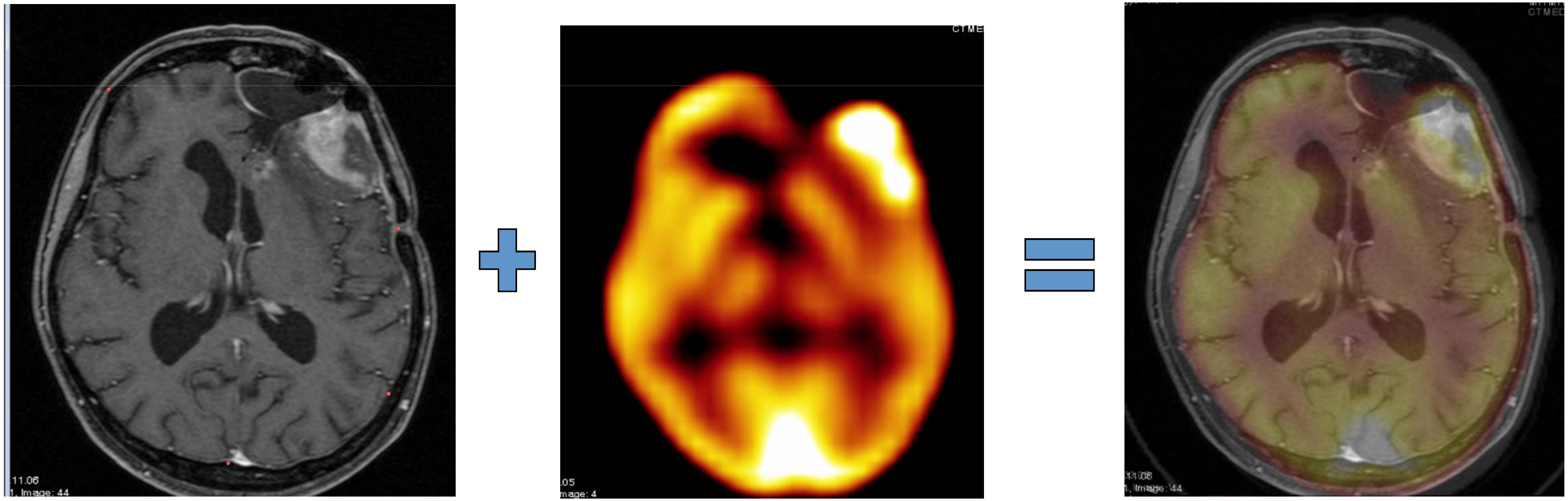
Dobór punktów kontrolnych powinien uwzględniać rodzaj przekształcenia geometrycznego stosowanego w rejestracji obrazów. Ponadto punkty kontrolne powinny pokrywać cały obszar obrazów, a nie tylko wąski region obrazu (z wyjątkiem takiej sytuacji, w której tylko ten właśnie region jest istotny). Zakładając, że wyznaczone zostały punktu kontrolne dla rejestrowanych obrazów, należy je następnie powiązać ze sobą w celu wygenerowania parametrów funkcji dopasowującej. Możliwe jest to na drodze automatycznej lub ręcznej.

Rejestracja (dopasowanie) obrazów z różnych źródeł (różnych modalności)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

Rejestracja (dopasowanie) obrazów z różnych źródeł (różnych modalności)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

Interpolacja

Interpolacja, czyli przybliżanie wartości piksela inną wartością – najbardziej prawdopodobną.

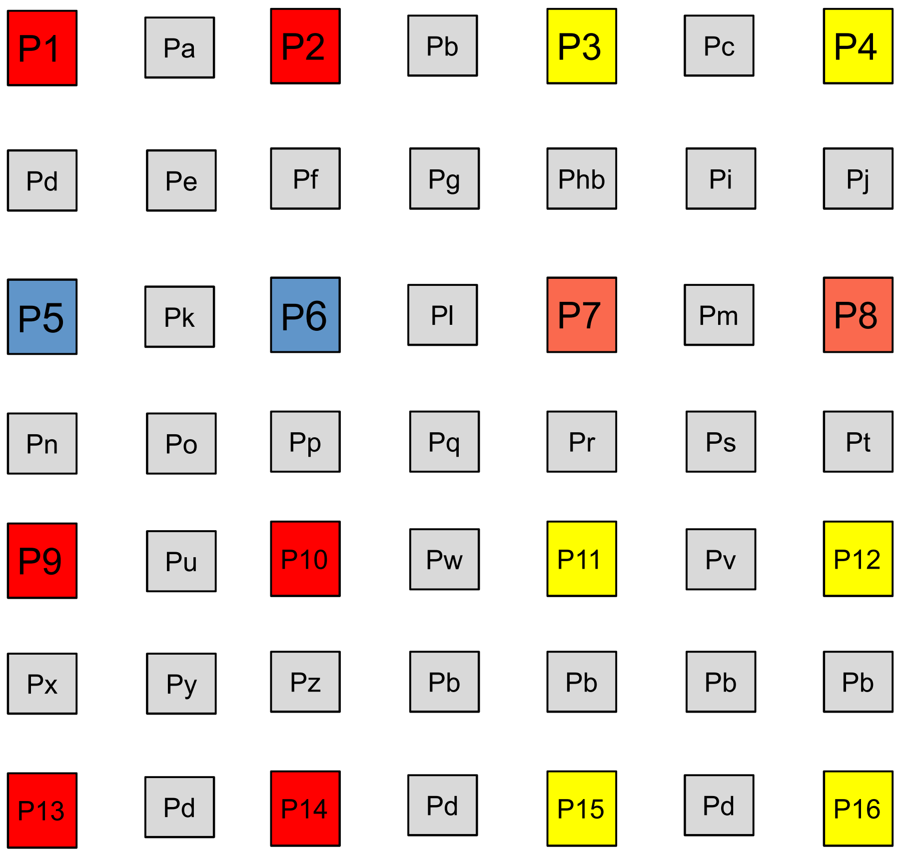
Przekształcenie geometrii obrazu wymaga często (np. po obrocie, powiększeniu) określenia nowych wartości pikseli w nowo stworzonej siatce obrazu. Dla tych potrzeb najczęściej stosuje się metody interpolacyjne. Zasadniczo stosuje się często metody:

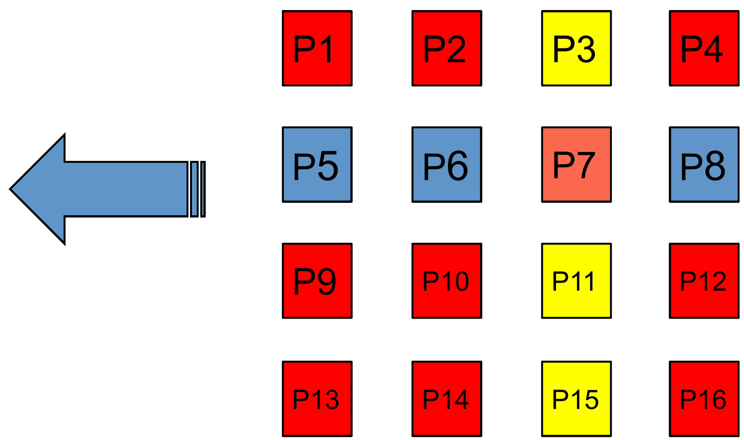
- najbliższego sąsiedztwa,
- interpolacji dwuliniowej,
- interpolacji metodą splotu sześciennego.

Interpolacja

Interpolacja przyda nam się np. w przypadku powiększenia obrazu. Załóżmy, że powiększamy obraz dwukrotnie w obu kierunkach:

Na diagramie mamy fragment powiększonego obrazu. Kolorowe kwadraty to piksele oryginalnego obrazu, szare to nowe piksele, których wartość trzeba wyznaczyć, czyli interpolować.





Interpolacja – metoda najbliższego sąsiada

W metodzie najbliższego sąsiedztwa oblicza się odwrotną transformację skorygowanych współrzędnych określonego piksela, a następnie szuka się piksela o najbliższych współrzędnych. Wartość najbliższego piksela przepisuje się jako nową wartość piksela obrazu skorygowanego. W ten sposób uzyskuje się skorygowane współrzędne macierzy obrazu wraz z przeliczonymi wartościami poszczególnych pikseli. Otrzymuje się więc nowy obraz.

Zaletą metody najbliższego sąsiedztwa jest to, że wartości oryginalne są przepisywane bez dokonywania uśrednień. Uzyskuje się w ten sposób wiarygodne dane do analiz spektralnych.
Metoda ta jest również obliczeniowo najszybszą metodą spośród omawianych.

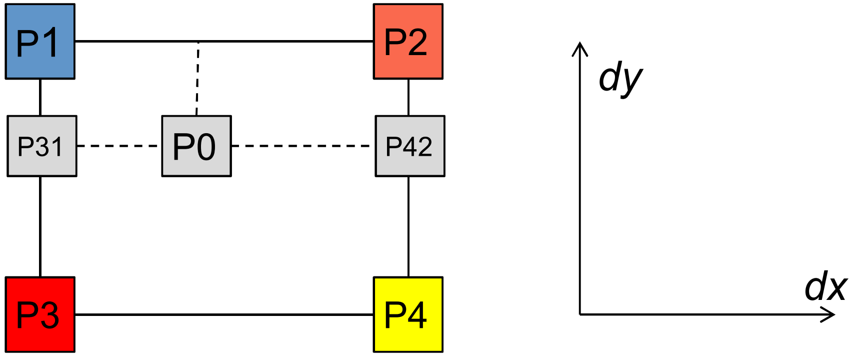
Wadą metody jest to, że mogą istnieć piksele, których oryginalne wartości nigdy nie pojawią się w nowym obrazie oraz niektóre wartości pikseli obrazu oryginalnego zostaną powtórzone.

Interpolacja – metoda dwuliniowa(biliniowa)

Metoda interpolacji biliniowej wykorzystuje cztery najbliższe piksele względem współrzędnych piksela obrazu skorygowanego po jego transformacji odwrotnej.

Metoda ta interpoluje kolejno wartości pomiędzy poszczególnymi pikselami w sposób liniowy.

Zakładając, że wartości czterech pikseli wynoszą P1, P2, P3 i P4 a wartość piksela obrazu skorygowanego P0 oraz zakładając poniższą relację geometryczną pomiędzy pikselami:



poszukiwana wartość piksela obrazu skorygowanego, dla odległości pomiędzy pikselami starej siatki równej 1,dana jest wzorem:

$$P0 = P1(1-dx)(1-dy) + P2dx(1-dy) + P3dy(1-dx) + P4dxdy$$

Interpolacja – metoda dwuliniowa(biliniowa)

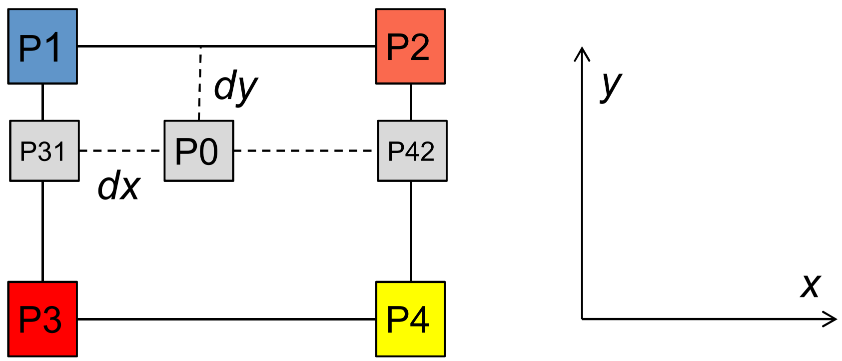
$$P0 = P1(1-dx)(1-dy) + P2dx(1-dy) + P3dy(1-dx) + P4dxdy$$

gdzie:
dx - odległość w kierunku X pomiędzy pikselem P0 a pikselami P1,P2;
dy - odległość w kierunku Y pomiędzy pikselem P0 a pikselami P1,P3;
Pk - wartości najbliższych pikseli względem poszukiwanego.

$$P31 = \left(\frac{P3-P1}{d}\right) \bullet dy + P1$$

$$P42 = \left(\frac{P4-P2}{d}\right) \bullet dy + P2$$

$$P0 = \left(\frac{P31-P42}{d}\right) \bullet dx + P31$$



gdzie:
P31, P42 - pośrednie wartości pikseli potrzebne do policzenia wartości piksela poszukiwanego,
d - odległość pomiędzy pikselami starej siatki (zazwyczaj równa 1), reszta jak wyżej.

Interpolacja – metodą splotu sześciennego

Kolejna metoda bazuje na 16 pikselach obrazu oryginalnego najbliższych względem piksela poszukiwanego. Funkcja interpolująca jest funkcją sześcienną, a wykorzystanie tak dużej ilości pikseli obrazu oryginalnego znacznie wpływa na eliminację składowych wysokich częstotliwości. Wartość poszukiwanego piksela oblicza się na podstawie wzoru, który składa się z 16 dodawanych do siebie czynników typu: Pk*F(d).

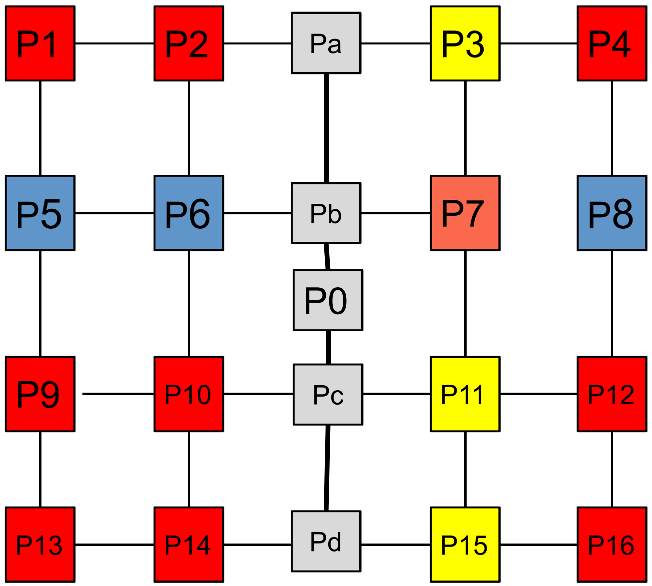
Parametr Pk oznacza wartość kolejnego piksela, natomiast F(d) jest funkcją odległości pomiędzy pikselem poszukiwanym a pikselami Pk.
Opis funkcji sześciennej F(d) jest właściwym elementem tej metody różni się w zależności od oprogramowania.

Najlepszym przykładem ukazującym interpolację metodą **splotu sześciennego** jest algorytm analogiczny do wykorzystywanego w metodzie biliniowej, z rozpatrzeniem 16 elementów zamiast 4.

Interpolacja – metodą splotu sześciennego

Kolejna metoda bazuje na 16 pikselach obrazu oryginalnego najbliższych względem piksela poszukiwanego.

W metodzie tej na początku przelicza się wartości pośrednie na danej osi otrzymując odpowiednio Pa, Pb, Pc i Pd.
Wzór poniższy podaje przykładowe równanie obliczenia Pa.



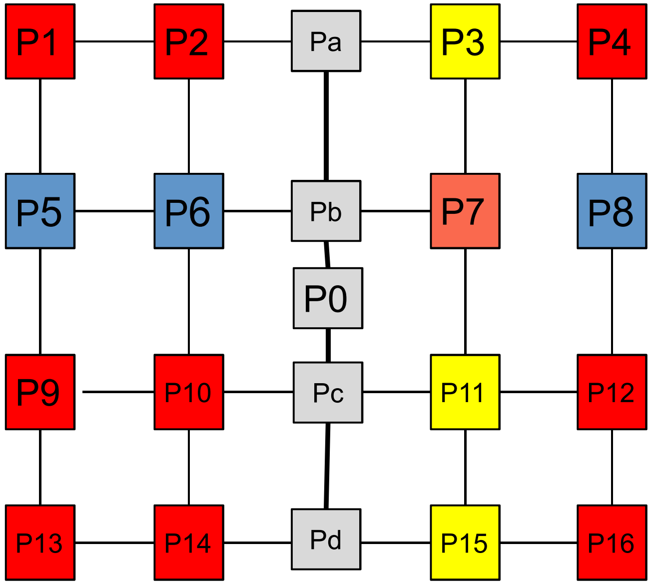
$$Pa = (P4 - P3 + P2 - P1)\cdot(dx)^3 + (P3 - P4 - 2\cdot P2 + 2\cdot P1)\cdot(dx)^2 + (P3 - P1)(dx) + P2$$

gdzie: P1...P4 - wartości pikseli w odpowiednich punktach według rysunku,
dx - odległość pomiędzy P2 i Pa,
Pa - wartość pośrednia służąca do policzenia P0.

Interpolacja – metodą splotu sześciennego

W sposób analogiczny oblicza się pozostałe wartości pośrednie Pb, Pc i Pd.

Następnie oblicza się wartość szukaną **P0** analogicznie, według wzoru:

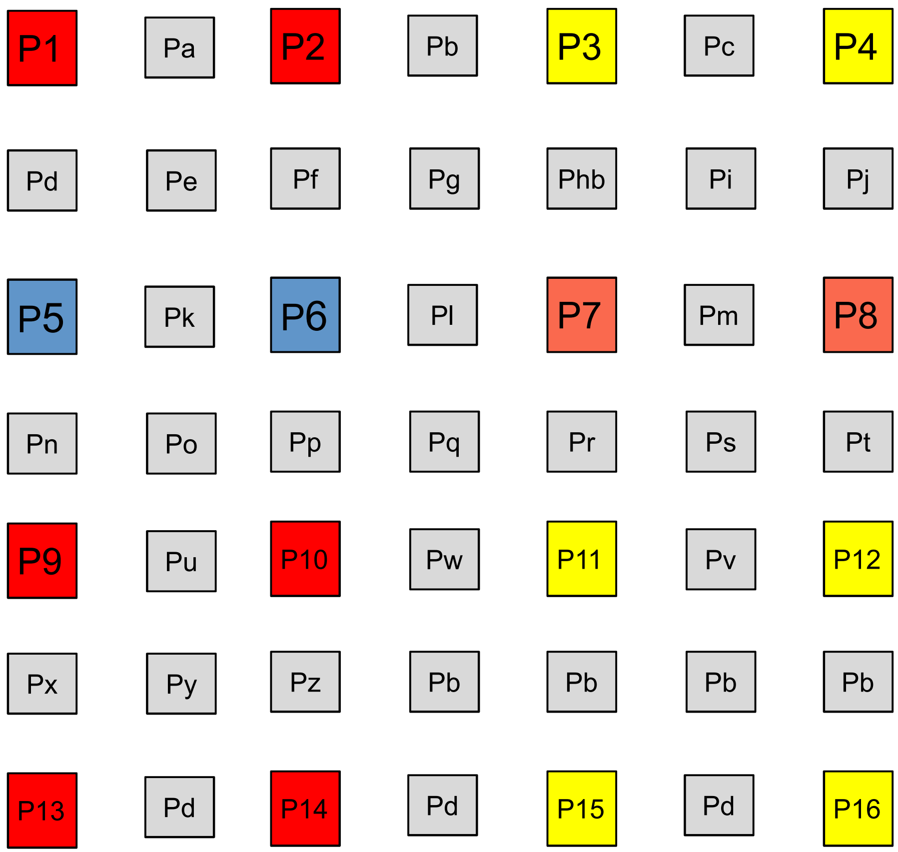


$$P0=(Pd-Pc+Pb-Pa)\cdot(dy)^3+(Pc-Pd-2\cdot Pb+2\cdot Pa)\cdot(dy)^2+(Pc-Pa)\cdot dy+Pb$$

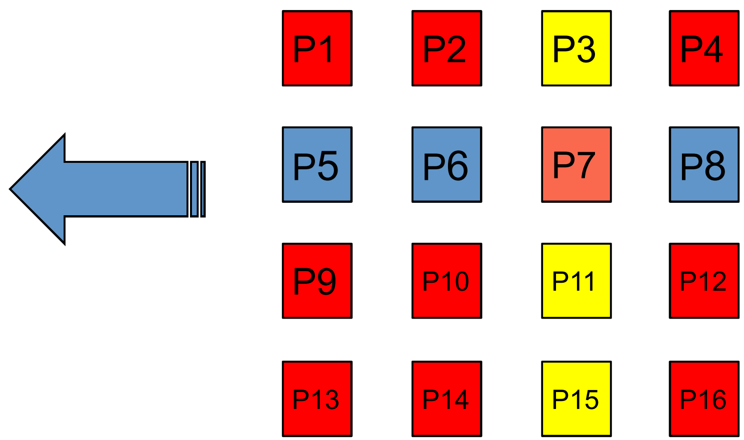
gdzie: dy - odległość pomiędzy Pb i P0.

Interpolacja – zastosowania

Interpolacja przyda nam się np. w przypadku powiększenia obrazu. Załóżmy, że powiększamy obraz dwukrotnie w obu kierunkach:



Na diagramie mamy fragment powiększonego obrazu. Kolorowe kwadraty to piksele oryginalnego obrazu, szare to nowe piksele, których wartość trzeba wyznaczyć, czyli interpolować.



Zapraszamy na kolejne zajęcia w przyszłym tygodniu