

Prognozowanie i symulacje

Wykład 2

Prognozowanie szeregów czasowych z tendencją rozwojową

- Model wyrównania wykładniczego Holta
- Model trendów pełzających z wagami harmonicznymi
- Model analityczny tendencji rozwojowej

Model wyrównania wykładniczego Holta

$$F_1 = y_1$$

$$F_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}), \text{ dla } t = 2, \dots, n$$

$$S_1 = 0$$

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1}, \text{ dla } t = 2, \dots, n$$

gdzie:

α, β – stałe wygładzania z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$

F – wygładzona wartość zmiennej prognozowanej (trend)

S – wygładzony przyrost trendu

Model wyrównania wykładniczego Holta

Jak wyznaczyć wartości początkowe szeregów F i S?

- F = wartość początkowa szeregu prognozowanego,
S=0
- F = wartość początkowa szeregu prognozowanego,
S = $y_2 - y_1$
- F = wyraz wolny, S = współczynnik kierunkowy – obie oceny parametru pochodzą z liniowej funkcji trendu oszacowanej dla szeregu próbkowego,

Model wyrównania wykładniczego Holta

$$y_t^P = F_n + (t - n)S_n, \text{ dla } t > n$$

gdzie:

F_n – wygładzona wartość zmiennej prognozowanej (trend) dla okresu n

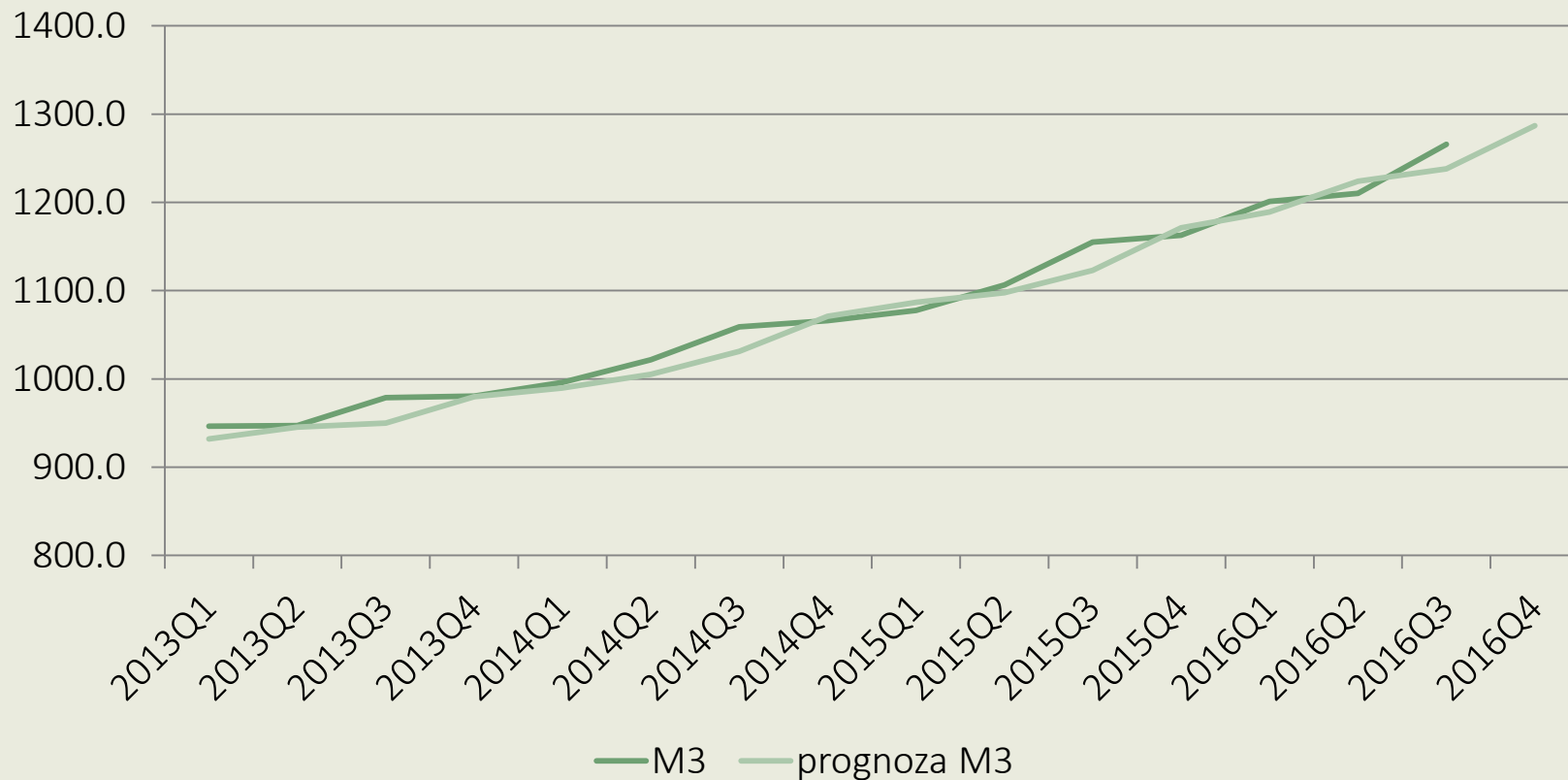
S_n – wygładzony przyrost trendu dla okresu n

$t-n$ – realne czasowe wyprzedzenie prognozy

| | M3 | F | S | prognoza M3 |
|--------|--------|--------|------|-------------|
| 2013Q1 | 932.0 | 932.0 | 0.0 | |
| 2013Q2 | 946.6 | 936.9 | 4.9 | 932.0 |
| 2013Q3 | 947.2 | 943.6 | 6.7 | 941.8 |
| 2013Q4 | 978.9 | 960.0 | 16.3 | 950.4 |
| 2014Q1 | 980.4 | 977.7 | 17.7 | 976.3 |
| 2014Q2 | 996.2 | 995.7 | 18.0 | 995.4 |
| 2014Q3 | 1021.8 | 1016.4 | 20.7 | 1013.6 |
| 2014Q4 | 1059.0 | 1044.5 | 28.1 | 1037.1 |
| 2015Q1 | 1066.0 | 1070.4 | 25.9 | 1072.6 |
| 2015Q2 | 1077.7 | 1090.0 | 19.6 | 1096.2 |
| 2015Q3 | 1106.5 | 1108.6 | 18.6 | 1109.7 |
| 2015Q4 | 1155.0 | 1136.5 | 27.9 | 1127.2 |
| 2016Q1 | 1162.6 | 1163.8 | 27.3 | 1164.5 |
| 2016Q2 | 1200.9 | 1194.4 | 30.6 | 1191.2 |
| 2016Q3 | 1210.1 | 1220.0 | 25.6 | 1225.0 |
| 2016Q4 | 1265.7 | 1252.3 | 32.3 | 1245.6 |
| 2017Q1 | | | | 1284.7 |

| | Uwaga!!! Stałe wygładzania α i β NIE sumują się do 1 !!! | | | | | | | | | Solver |
|----------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|--------|
| α | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.34 |
| β | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 1.00 |
| RMSPE | 2.92 | 1.78 | 1.54 | 1.49 | 1.50 | 1.54 | 1.61 | 1.72 | 1.95 | 1.42 |

Model wyrównania wykładniczego Holta



Model trendów pełzających z wagami harmonicznymi

Dla szeregu czasowego y_1, \dots, y_n , szacowane są łańcuchowo, indywidualne liniowe funkcje trendu na podstawie k obserwacji należących do tego szeregu ($k < n$) oraz wyznaczane są wartości teoretyczne tych modeli

$$f_1(t) = \alpha_1 + \beta_1 t + \varepsilon_1 \text{ dla } y_1, \dots, y_k$$

$$f_2(t) = \alpha_2 + \beta_2 t + \varepsilon_2 \text{ dla } y_2, \dots, y_{k+1}$$

⋮

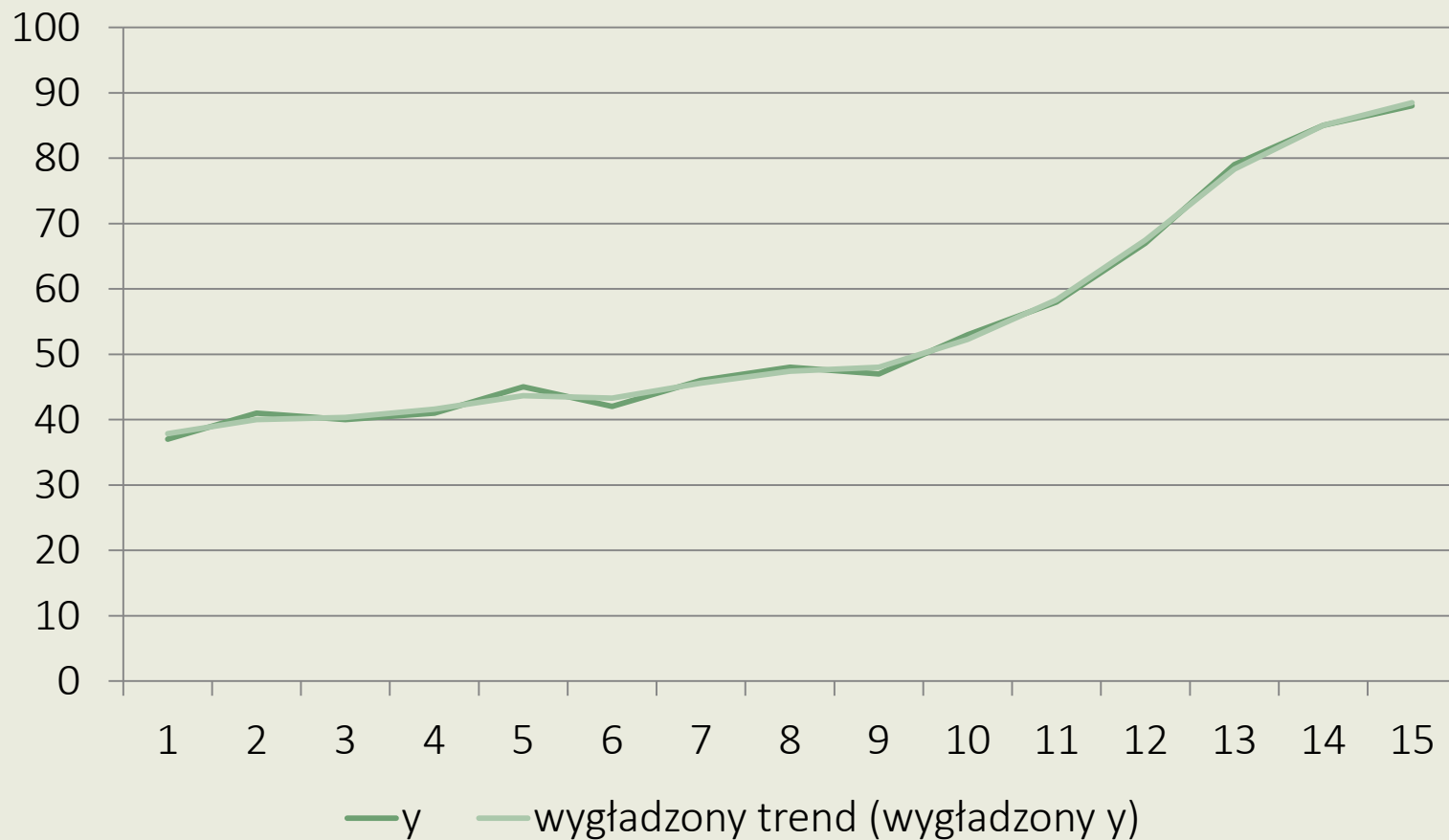
$$f_{n-k+1}(t) = \alpha_{n-k+1} + \beta_{n-k+1} t + \varepsilon_{n-k+1} \text{ dla } y_{n-k+1}, \dots, y_n$$

Model trendów pełzających z wagami harmonicznymi

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 37 | 37.8 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 41 | 39.3 | 40.7 | | | | | | | | | | | |
| 3 | 40 | 40.8 | 40.7 | 39.5 | | | | | | | | | | |
| 4 | 41 | | 40.7 | 42.0 | 42.2 | | | | | | | | | |
| 5 | 45 | | | 44.5 | 42.7 | 43.8 | | | | | | | | |
| 6 | 42 | | | | 43.2 | 44.3 | 42.3 | | | | | | | |
| 7 | 46 | | | | | 44.8 | 45.3 | 46.5 | | | | | | |
| 8 | 48 | | | | | | 48.3 | 47.0 | 46.8 | | | | | |
| 9 | 47 | | | | | | | 47.5 | 49.3 | 47.2 | | | | |
| 10 | 53 | | | | | | | | 51.8 | 52.7 | 52.3 | | | |
| 11 | 58 | | | | | | | | | 58.2 | 59.3 | 57.5 | | |
| 12 | 67 | | | | | | | | | | 66.3 | 68.0 | 68.0 | |
| 13 | 79 | | | | | | | | | | | 78.5 | 77.0 | 79.5 |
| 14 | 85 | | | | | | | | | | | | 86.0 | 84.0 |
| 15 | 88 | | | | | | | | | | | | | 88.5 |

Trend pełzający to wartości wygładzone szeregu prognozowanego są sumą wartości teoretycznych wyznaczonych z indywidualnych funkcji trendu dla poszczególnych okresów

Model trendów pełzających z wagami harmonicznymi



Model trendów pełzających z wagami harmonicznymi

Aby ekstrapolować model w przyszłość należy zastosować metodę tzw. wag harmonicznych

Ekstrapolacja modelu trendu pełzającego. Obliczenie przyrostów wygładzonych wartości trendu

$$w_{t+1} = \bar{y}_{t+1} - \bar{y}_t, \quad t = 1, \dots, n-1$$

Nadanie wag poszczególnym przyrostom. Są to tzw. wagi harmoniczne. Najstarszym przyrostom odpowiadają najniższe wagi, przyrostom najnowszym wagi największe

$$C_{t+1}^n = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^t \frac{1}{n-i}, \quad t = 1, \dots, n-1$$

Model trendów pełzających z wagami harmonicznymi

Aby ekstrapolować model w przyszłość należy zastosować metodę tzw. wag harmonicznych

| wygładzony trend | przyrosty wygładzonego trendu | $1/(15-i)$ | wagi |
|------------------|-------------------------------|------------|-------|
| 37.8 | | | |
| 40.0 | 2.2 | 0.071 | 0.005 |
| 40.3 | 0.3 | 0.077 | 0.011 |
| 41.6 | 1.3 | 0.083 | 0.017 |
| 43.7 | 2.1 | 0.091 | 0.023 |
| 43.3 | -0.4 | 0.100 | 0.030 |
| 45.6 | 2.3 | 0.111 | 0.038 |
| 47.4 | 1.8 | 0.125 | 0.047 |
| 48.0 | 0.6 | 0.143 | 0.057 |
| 52.3 | 4.3 | 0.167 | 0.069 |
| 58.3 | 6.1 | 0.200 | 0.083 |
| 67.4 | 9.1 | 0.250 | 0.101 |
| 78.3 | 10.9 | 0.333 | 0.125 |
| 85.0 | 6.7 | 0.500 | 0.161 |
| 88.5 | 3.5 | 1.000 | 0.232 |

Model trendów pełzających z wagami harmonicznymi

Określenie średniego przyrostu trendu jako średniej ważonej (wagami harmonicznymi) wszystkich przyrostów.

$$\bar{w} = \sum_{t=1}^{n-1} C_{t+1}^n \cdot w_{t+1}$$

Wyznaczenie prognozy punktowej na moment/okres T .

$$y_t^P = \bar{y}_n + (T - n) \cdot \bar{w}$$

Prognozowanie na podstawie modeli ekonometrycznych - założenia

- Znany jest model analityczny kształtowania się zmiennej prognozowanej
 - Znane są oceny parametrów strukturalnych
 - Znane są oceny parametrów struktury stochastycznej
- Relacje opisane za pomocą modelu są stabilne w czasie – w okresie służącym do estymacji i w okresie prognozowanym
 - Stabilna jest postać analityczna
 - Stabilne są parametry strukturalne modelu
 - Zbiór zmiennych objaśniających modelu nie ulega zmianie

Prognozowanie na podstawie modeli ekonometrycznych - założenia

- Spełnione są założenia stochastyczne modelu
 - Normalność rozkładu składnika losowego
 - Brak autokorelacji
 - Brak heteroskedastyczności
 - Rozkład składnika losowego nie ulega zmianom w czasie
- Model jest dobrze dopasowany do zmienności badanego zjawiska

Prognozowanie na podstawie modeli ekonometrycznych - założenia

- Znane są wartości zmiennych objaśniających w okresie prognozowanym
 - Plany / założenia – prognozowanie bezwarunkowe
 - Prognozowanie wartości zmiennych objaśniających w okresie prognozowanym – modele trendu / trendu z sezonowością / regresja

Błędy *ex-ante* prognozy

- Średni błąd predykcji *ex-ante*

$$s_{D_T} = \sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (1 + c(X^T X)^{-1} c^T)}$$

Gdzie c – wektor wierszowy obserwacji na zmiennych objaśniających w okresie prognozowanym

- Względny błąd predykcji *ex-ante* – iloraz średniego błędu predykcji i wartości prognozy

$$V_{D_T} = \frac{s_{D_T}}{y_T^P}$$

Dziękuję za uwagę!
Aleksandra.Kordalska@pg.edu.pl