SFORMUŁOWANIE WARIACYJNE PB

aproksymacja skończenie wymiarowa

metoda Ritza

WYKŁAD 4

Wersja elektroniczna, http://www.okno.pg.gda.pl.

Literatura

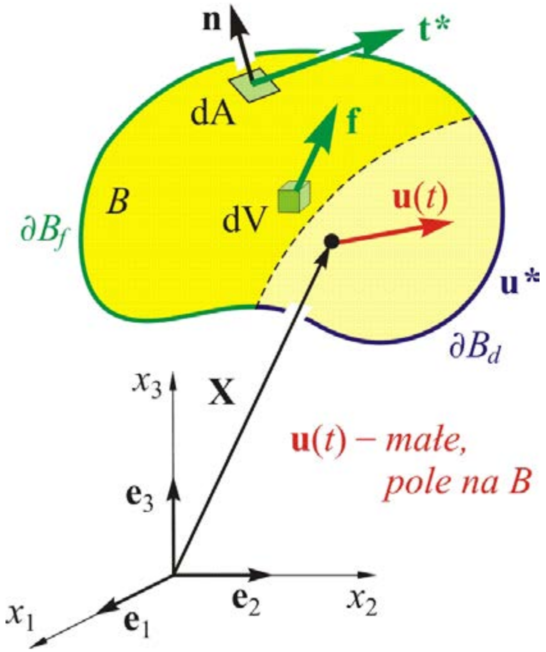
KLEIBER M.: *Wprowadzenie do metody elementów skończonych*. PAN IPPT, PWN Warszawa – Poznań 1989, Rozdz. 3 – 4.2, str. 20 – 42.

CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W.: *Statyka i Dynamika Powłok wielogałęziowych. Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*. Wydawnictwo IPPT PAN, Warszawa2004, Rozdz. 4.1, str. 269 – 282.

WILiŚ Politechnika Gdańska

J. Chróścielewski, W. Witkowski
Katedra Wytrzymałości Materiałów

Charakterystyka sformułowania silnego (S)



statyka liniowa:

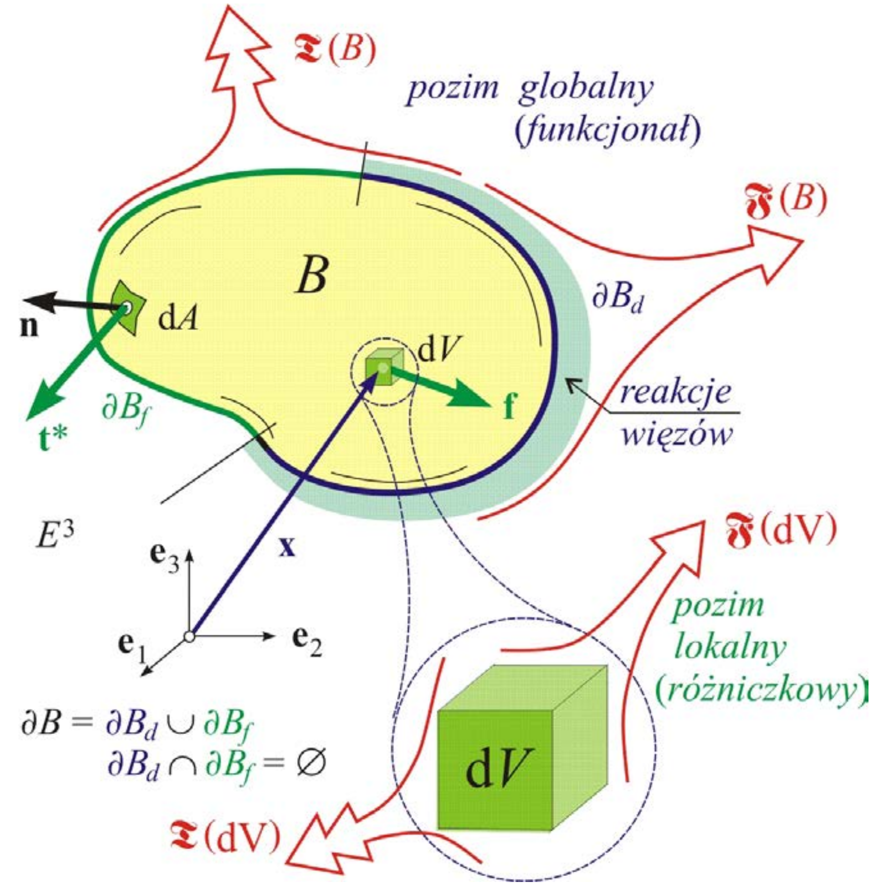
$D^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}=\mathbf{0}$	na B	statyczne równania równowagi (3r), **RR**;
$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{Du}$	na $B\cup\partial B$	równania geometryczne (6r), **RG**;
$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$	na $B\cup\partial B$	równania konstytutywne (6r), **RK**;
$u=u^*$	na ∂B_d	kinematyczne warunki brzegowe, **KB**;
$n^T\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{t}^*$	na ∂B_f	statyczne (dynamiczne) warunki brzegowe **SB**.

Układ zamknięty, **liczba niewiadomych** pól (**15**, $u\rightarrow 3$, $\boldsymbol{\varepsilon}\rightarrow 6$, $\boldsymbol{\sigma}\rightarrow 6$)
równa się **liczbie równań** (**15**, **RR**,**RG**,**RK**)
i po uwzględnieniu warunków brzegowych (**KB**,**SB**) może być rozwiązany.

Poszukiwanie rozwiązań w formie silnej (S) problemu brzegowego MOC **jest bardzo uciążliwe**.

Istnieje **niewielka liczba zadań** o **rozwiązaniach zamkniętych** (analitycznych, ścisłych).

Charakterystyka sformułowania słabego



Ułatwieniem i podstawą wielu rozwiązań numerycznych jest tzw. **sformułowanie** wariacyjne, nazywane także **słabym** lub ogólnym.

Istota **sformułowania słabego** polega na:

skonstruowanie **pewnego funkcjonału**, którego warunkami stacjonarności są odpowiednie równania pól (**RR**, **RG**, **RK**) i warunki brzegowe (**KB**, **SB**) uzyskane jako równania Eulera–Lagrange'a tegoż funkcjonału.

Charakterystyka sformułowania słabego

W ogólności problem brzegowy w **słabej formie** może być wyrażony jako

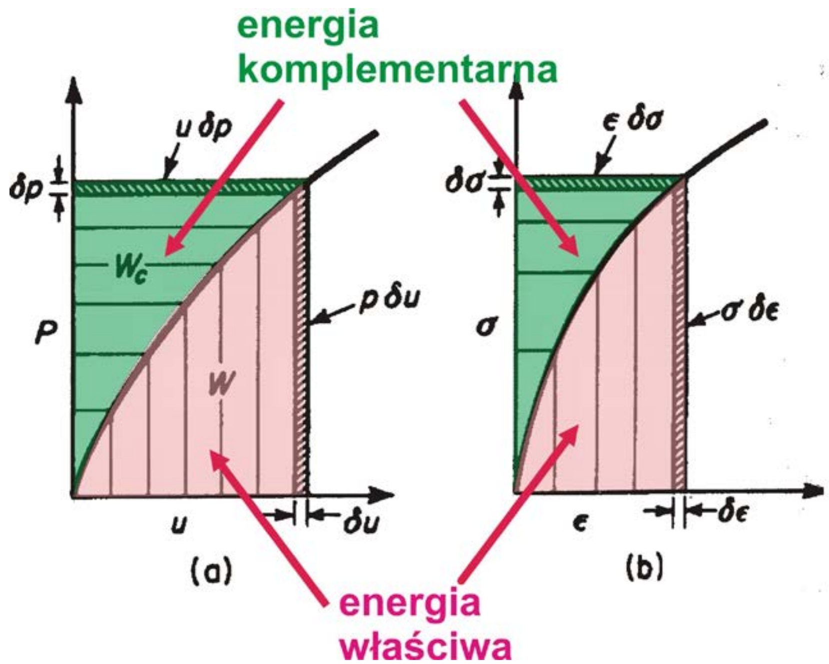
tożsamość całkowa, np.:

zasada pracy wirtualnej
zasada wirtualnych przemieszczeń,
zasada wirtualnej pracy komplementarnej.

albo

zasada wariacyjna, np.:

zasada stacjonarności energii potencjalnej,
zasada Hellingera–Reissnera
zasada Hu-Washizu,



Zalety sformułowania **słabego**:

1) **całkowa reprezentacja** problemu zamiast **różniczkowej**,
wymaga spełnienia słabszych warunków ograniczeń na regularność zarówno danych jak i rozwiązań,

2) w zwarty i jasny sposób **koncentruje w jednym wyrażeniu** wszystkie równania problemu,

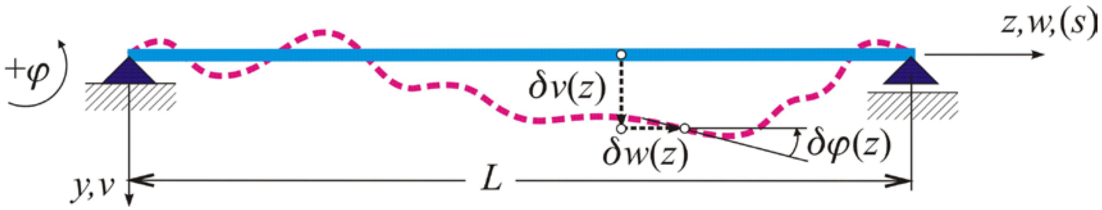
3) **postać niezmiennicza** – nie zależy od układu, funkcjonał ma zawsze określony sens fizyczny,

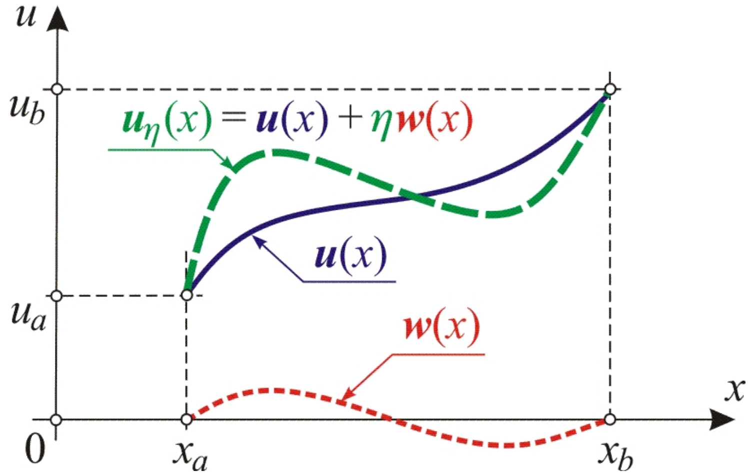
4) naturalna **baza do rozwiązań aproksymacyjnych**, umożliwia badanie błędów aproksymacji.

Pojęcie wariacji, pochodna kierunkowa

DEFINICJA Dowolne, dostatecznie regularna pole $\delta \mathrm{u} \in T_{\mathrm{u}} C(B)$ spełniające jednorodne warunki $\delta \mathrm{u} = 0$ na brzegu ∂B_u ciała jest nazywane **kinematycznie dopuszczalną wariacją**.

Zwyczajowo wariacje $\delta \mathrm{u}$ nazywane są wirtualnymi przemieszczeniami (oznaczaną też przez $\mathrm{w} \equiv \delta \mathrm{u}$)





Odnotować warto, że jeśli w przestrzeni rozwiązań $C(B)$ wprowadzimy definicję krzywej $\mathrm{u}_\eta = \mathrm{u}(\eta) = \mathrm{u} + \eta\delta\mathrm{u}$, przez punkt $\mathrm{u}_\eta(0) = \mathrm{u}$ to operacja wyznaczenia **pochodnej kierunkowej** w punkcie u w kierunku $\delta\mathrm{u}$ daje:

$$\delta[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(\mathrm{u} + \eta\delta\mathrm{u})\big|_{\eta=0} = \delta\mathrm{u} \equiv \mathrm{w}$$

czyli wariację możemy rozumieć jako pochodną kierunkową funkcji.

Zasada pracy wirtualnej (zarys wyprowadzenia)

Odkształcenia wirtualne $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

a) Niech pole $\mathrm{u} \in C(B)$ opisuje konfigurację ciała B.

b) Niech $\delta\mathrm{u} \equiv \mathrm{w} \in T_{\mathrm{u}}C(B)$ jako element przestrzeni stycznej do $C(B)$ w punkcie u oznacza pole wirtualnych przemieszczeń.

Wirtualne odkształcenia $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, na podstawie pochodnej kierunkowej odkształceń zapisanych dla krzywej

$$\mathrm{u}_\eta = \mathrm{u}(\eta) = \mathrm{u} + \eta\delta\mathrm{u} \equiv \mathrm{u} + \eta\mathrm{w}, \qquad \mathrm{u}_\eta(0) = \mathrm{u}$$

na przestrzeni konfiguracyjnej $C(B)$ parametryzowanej przez $\eta \in \acute{\mathbf{N}}$, mają formę

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u};\delta\mathbf{u}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \eta\delta\mathbf{u})\Big|_{\eta=0} \equiv \mathrm{Lin}(\delta\mathbf{u}) \xrightarrow{\text{w naszym przypadku}} \boxed{\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\delta\mathbf{u} \equiv \mathbf{D}\mathbf{w}}.$$

Zasada pracy wirtualnej (zarys wyprowadzenia)

Zasada pracy wirtualnej stwierdza, że obowiązuje

$$\underbrace{\int_B \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V}_{\substack{\text{wirtualna praca}\\ \text{wewnętrzna (naprężeń)}}} = \underbrace{\int_B \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial B_f} \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}^{*}\,\mathrm{d}A}_{\text{wirtualna praca obciążeń zewnętrznych}},$$

wtedy i tylko wtedy gdy:

a) spełnione są lokalne równania równowagi (**RR**),
b) spełnione są statyczne warunki brzegowe (**SB**),
c) przemieszczenia wirtualne są kinematycznie dopuszczalne to między innymi znaczy, że $\delta \mathrm{u} = 0$ na ∂B_d.

Zasada pracy wirtualnej jest **niezależna od definicji materiału**.

Uzupełniając ją zależnością odkształcenie–przemieszczenie (**RG**) (niekoniecznie liniową) oraz relacjami konstytutywnymi (**RK**) (niekoniecznie liniowosprężystymi) otrzymuje się słabe sformułowanie problemu obowiązujące także w zagadnieniach nieliniowych.

Zasada wirtualnych przemieszczeń (zarys wyprowadzenia)

Wychodząc z **zasady pracy wirtualnej**, wyrażając

wirtualną pracę wewnętrzną $\int_B \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V$,

poprzez przemieszczenia tj. naprężenia jako funkcję przemieszczeń,
wykorzystując równania konstytutywne (**RK**) i zależność geometryczną (**RG**):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),\mathbf{x}\right) \xrightarrow{\text{w naszym przypadku}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}(\mathbf{D}\mathbf{u}), \quad \text{przy czym } \mathrm{E}^{\mathrm{T}} = \mathrm{E},$$

otrzymuje się funkcjonał **zasady wirtualnych przemieszczeń**

$$G[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] = G_i[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] - G_e[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] = 0,$$

gdzie

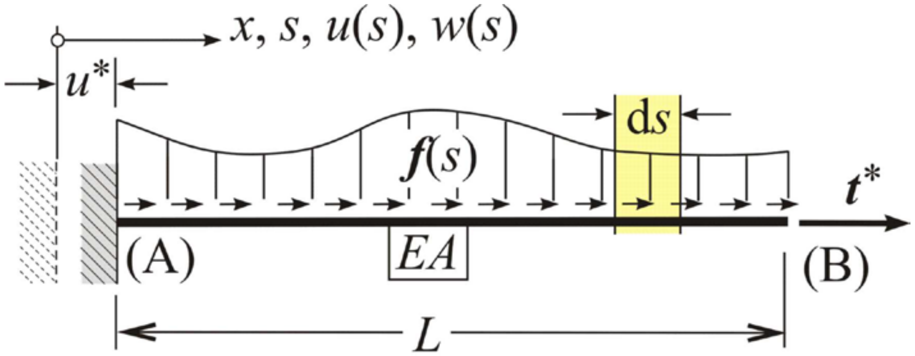
$$G_i[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] = \int_B (\mathrm{D}\delta\mathrm{u})^{\mathrm{T}}\mathrm{E}(\mathrm{D}\mathrm{u})\,\mathrm{d}V.$$

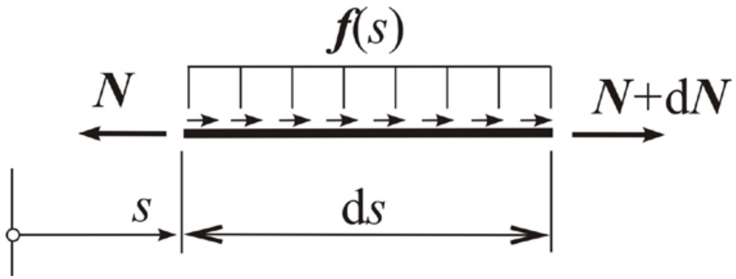
$$G_e[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] = \int_B \delta\mathrm{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{f}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial B_f} \delta\mathrm{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{t}^{*}\,\mathrm{d}A.$$

Człon opisujący pracę wirtualną sił zewnętrznych jest tu taki sam jak w zasadzie pracy wirtualnej.

Przykład

Sformułuj **zasadę wirtualnych przemieszczeń** dla liniowo sprężystego pręta prostego jak na rysunku





jedna współrzędna opisu dziedziny $(s \equiv x)$, jeden parametr teorii (u), jeden węzłowy stopień swobody (u_a).

(S) – silne, **klasyczne sformułowanie problemu brzegowego (WM)**

$$N' + f = 0, \quad \varepsilon = u', \quad N = EA\varepsilon, \quad + \quad \text{warunki brzegowe:} \quad u|_{x=0} = u^*, \quad N|_{x=L} = t^*.$$

Rozwiązanie:

a) Mnożymy równanie równowagi $N' + f = 0$ przez δu i całkujemy wzdłuż długości pręta

$$\int_L (N,_x + f)\delta u \mathrm{d}s = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_L N,_x \delta u \mathrm{d}s + \int_L f\, \delta u \mathrm{d}s = 0$$

b) Obliczamy pochodną iloczynu $(N\delta u),_x = N,_x \delta u + N\delta u,_x \quad \Rightarrow \quad N,_x \delta u = (N\delta u),_x - N\delta u,_x$

c) Formalnie stosujemy twierdzenie o dywergencji do członu $\int_L (N\delta u),_x \mathrm{d}s = (\delta u N)|_{x=L}$

d) Wracamy do punktu a) i otrzymujemy

$$\int_L N,_x \delta u \mathrm{d}s + \int_L f\, \delta u \mathrm{d}s = 0 \;\Rightarrow\; -\int_L N\delta u,_x \mathrm{d}s + \int_L f\, \delta u \mathrm{d}s + (\delta u N)|_{x=L} = 0 \;\Rightarrow\; \int_L N\delta u,_x \mathrm{d}s = \int_L f\, \delta u \mathrm{d}s + (\delta u N)|_{x=L}$$

e) Ponieważ $\varepsilon = u,_x \quad \Rightarrow \quad \delta\varepsilon = \delta u,_x$ oraz $N = EA\varepsilon$ to otrzymujemy poszukiwany wynik w postaci

(W) – wariacyjne, **słabe sformułowanie problemu brzegowego,**

$$\int_L \delta\varepsilon N \mathrm{d}s = \int_L \delta u\, f\, \mathrm{d}s + (\delta u N)|_{x=L} \quad \Rightarrow \quad \int_L \delta\varepsilon EA\, \varepsilon \mathrm{d}s = \int_L w f\, \mathrm{d}s + w t^*, \qquad w(x) \equiv \delta u(x),$$

Tym samym, w toku ścisłych matematycznych przekształceń dowiedliśmy **równoważności**

$$\underbrace{(S) \Leftrightarrow (W)}_{\text{ciągły}}$$

Metody numeryczne (MN) **rozwiązywanie zadań matematycznych za pomocą działań arytmetycznych.** Zachodzi potrzeba **przybliżania wielkości niearytmetycznych wielkościami arytmetycznymi** i **badania błędów** wywołanych takim postępowaniem.

Aproksymacja, uwagi ogólne

1. Podstawowym celem aproksymacji jest **osiągnięcie** pewnej żądanej **dokładności obliczenia** przybliżanej wielkości, a także możliwość jej **oszacowania**.
   Pytanie: Jaki **jest dopuszczalna błąd** wyniku?
   Pytanie ogólne: **Co rozumiemy przez błąd rozwiązania**?
   (np. błąd względy, bezwzględny, przedziałowy, błąd średni - wieloznaczność pojęcia).
2. **Określenie ilości obliczeń** potrzebnych do uzyskania przybliżenia.
   Pytanie: **Jak szybko** można otrzymać rozwiązanie używając danej metody?

Zakładamy, że
a) żądaną **dokładność można osiągnąć**,
b) wszystkie rozpatrywane **metody ,,działają”** (tzn. prowadzą do sensownego wyniku, np. zbieżność iteracji).

Klasy funkcji aproksymacyjnych

Wiele zadań **MN polega na przybliżaniu funkcji $f(x)$** kombinacją (najczęściej liniową) funkcji należących do pewnej szczególnej klasy, np.:

– N pierwszych wyrazów szeregu Taylora,
– **wielomianami stopnia n** (np. wzór trapezów, MES),
– klasa funkcji trygonometrycznych - dla funkcji okresowych,
– funkcje wykładnicze, itp.

Problem ciągły (C), sformułowanie

Zastępowanie układu typu kontynualnego (**o nieskończonej liczbie stopni swobody**)
np. funkcjonału prac wirtualnych $G: \mathcal{U} \times T\mathcal{U} \rightarrow$ **Ń**

$$G[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] = G_i[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] - G_e[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] = \int_B (\mathrm{D}\delta\mathrm{u})^{\mathrm{T}} \mathrm{E}(\mathrm{Du})\,\mathrm{d}V - (\int_B \delta\mathrm{u}^{\mathrm{T}} \mathrm{f}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial B_f} \delta\mathrm{u}^{\mathrm{T}} \mathrm{t}^* \mathrm{d}A),$$

układem dyskretnym (**o skończonej liczbie stopni swobody**).

Problem C: Znaleźć kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń $\mathrm{u} \in \mathcal{U} \subset C(B)$ takie, że funkcjonał

$$G[\mathrm{u};\delta\mathrm{u}] = 0,$$

dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wirtualnych przemieszczeń $\delta\mathrm{u} \in T_{\mathrm{u}}\mathcal{U} \subset TC(B)$, to znaczy spełniających jednorodne przemieszczeniowe warunki brzegowe $\delta\mathrm{u} = 0$ na ∂B_d.

Tutaj C określa **problem Ciągły.**

Problem dyskretny (D), aproksymacja skończenie wymiarowa

a) Niech $C_h(B_h)$ jest **skończenie wymiarową podprzestrzenią** $C(B)$.

b) Niech $TC_h(B_h)$ oznacza odpowiednią wiązkę styczną do niej.

c) Oznaczamy skończenie wymiarowe odpowiedniki pól $\mathrm{x}_h \in B_h$ dla x,

$\mathrm{u}_h \in C_h(B_h)$ dla u,

$\delta\mathrm{u}_h \in T_{\mathrm{u}_h} C_h(B_h)$ dla $\delta\mathrm{u}$.

h – **parametr charakterystyczny aproksymacji** taki, że
$C_h(B_h) \to C(B)$ jeśli $h \to \infty$ (alternatywnie $h \to 0$) w sensie definicji (przy $B_h \to B$ lub $B_h \equiv B$).

Aproksymację skończenie wymiarową (problem dyskretny) do Problemu C formułuje się jako:

Problem D: Znaleźć kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń $\mathrm{u}_h \in \mathcal{U}_h \subset C_h(B_h)$ takie, że funkcjonał

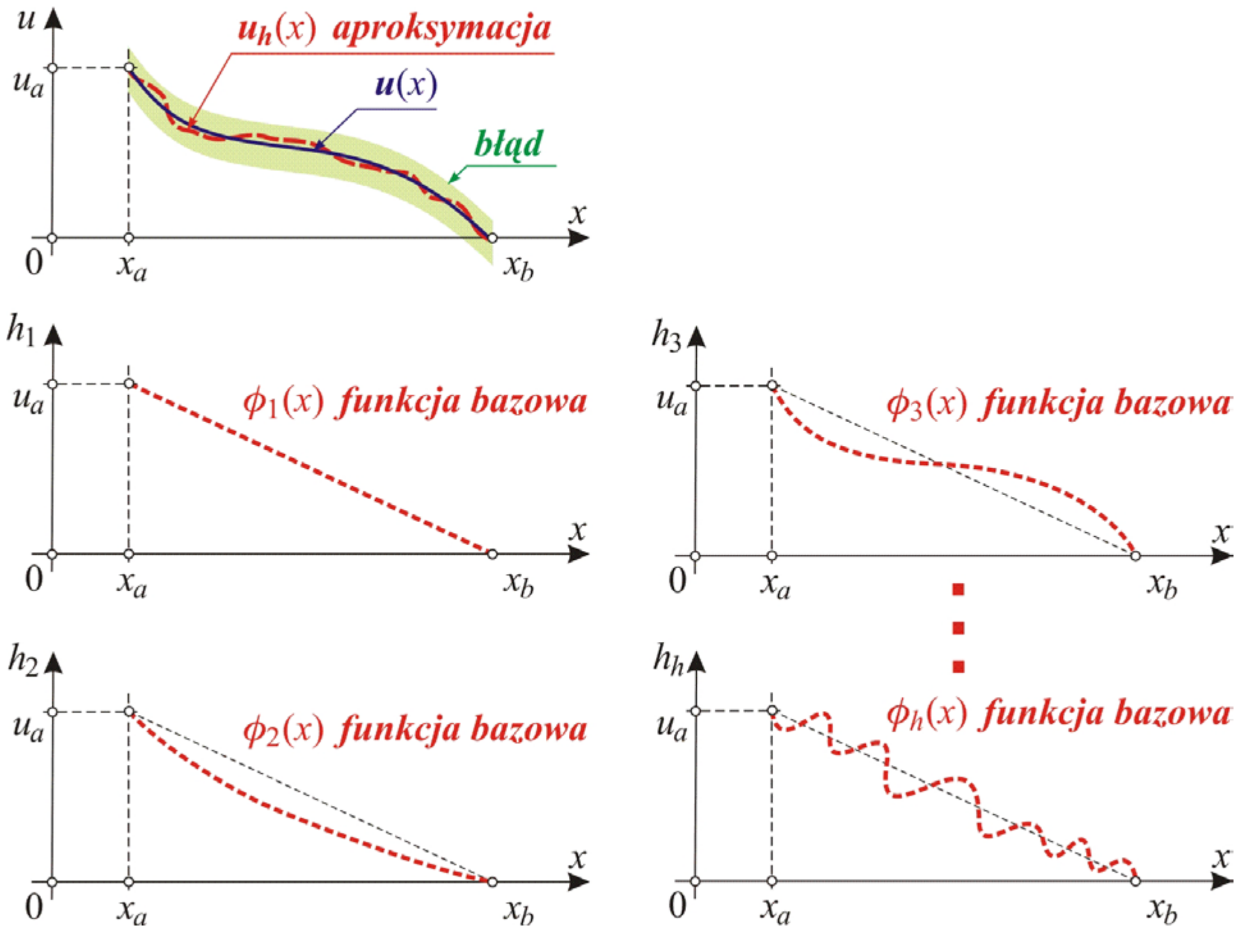
$$G[\mathrm{u}_h; \delta\mathrm{u}_h] = 0$$

dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wirtualnych przemieszczeń $\delta\mathrm{u}_h \in T_{\mathrm{u}_h}\mathcal{U}_h \subset TC_h(B_h)$, to znaczy spełniających jednorodne przemieszczeniowe warunki brzegowe $\delta\mathrm{u}_h = 0$ na $(\partial B_d)_h$.

Mówi się, że rozwiązanie u_h problemu D **jest aproksymacją zbieżną do rozwiązania** u problemu C **jeśli** $\mathrm{u}_h \to \mathrm{u}$ przy $h \to \infty$.

Metoda Rayleigha-Ritza (R-R), koncepcja

Aproksymacja poszukiwanego rozwiązania $\mathrm{u}(\mathrm{x}) \in \mathcal{U}$ **na całym rozpatrywanym obszarze** $\mathrm{x} \in B$ za pomocą kombinacji liniowej układu h **liniowo niezależnych znanych funkcji** $\varphi_n \quad (n = 1, 2, \ldots, h)$ (tworzących bazą skończenie wymiarowej przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych $\mathcal{U}_h$):



$$\mathrm{u}_h(\mathrm{x}) = \sum_{a=1}^{N} \mathrm{h}_a(\mathrm{x})\mathrm{a}_a = \mathrm{h}(\mathrm{x})\mathrm{a},$$

$$\mathrm{x} \in B, \qquad \mathrm{u}_h \in \mathcal{U}_h \subset C_h(B).$$

Jednoczesna i jednolita aproksymacja φ_a wszystkich trzech składowych przemieszczeń:

$$\mathrm{h}_a(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_a(\mathrm{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_a(\mathrm{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_a(\mathrm{x}) \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{a}_a = \begin{Bmatrix} a_a \\ b_a \\ c_a \end{Bmatrix},$$

$$\mathrm{h}(\mathrm{x}) = [\mathrm{h}_1(\mathrm{x})\, \mathrm{h}_2(\mathrm{x}) \ldots \mathrm{h}_N(\mathrm{x})], \qquad \mathrm{a} = \begin{Bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \\ \ldots \\ \mathrm{a}_N \end{Bmatrix}.$$

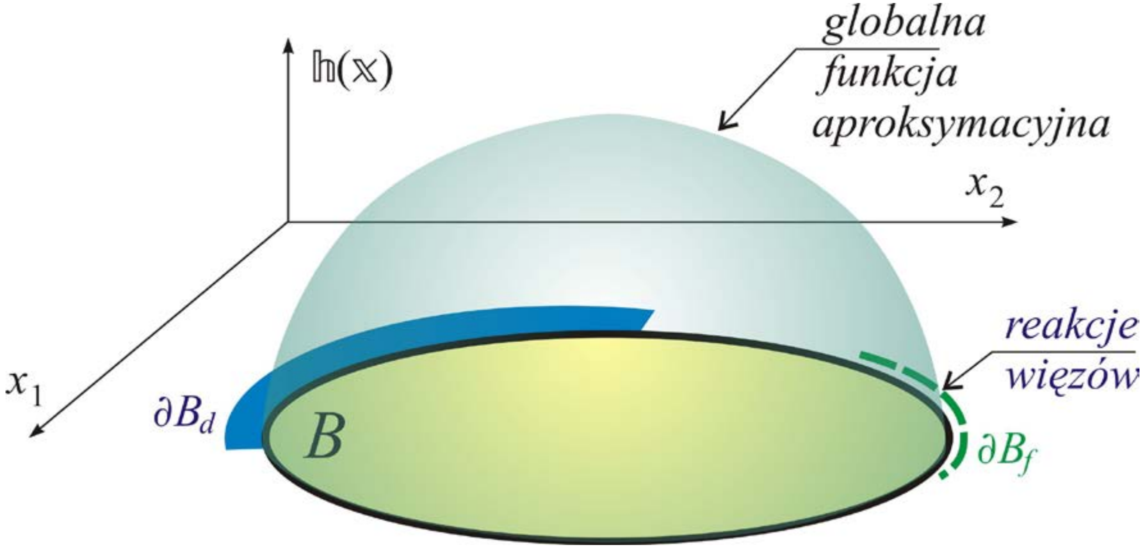
Funkcje h, (φ_n) – **funkcje testowe**,

parametry a – **współrzędne uogólnione**.

Metoda Rayleigha-Ritza (R-R), **tok postępowania**

a) Poszukiwana funkcja u_h musi spełniać kinematyczne warunki brzegowe, tj. tworzące ją funkcje dobierane są tak, aby aproksymacja $\mathrm{u}_h = \mathrm{u}^*$ na brzegu ∂B_d niezależnie od wartości parametrów a.

b) Dziedzina problemu B i jej brzeg ∂B_d nie podlega aproksymacji.



$$\mathrm{u}_h(\mathrm{x}) = \sum_{a=1}^{N} \mathrm{h}_a(\mathrm{x})\mathrm{a}_a = \mathrm{h}(\mathrm{x})\mathrm{a}, \quad \mathrm{x} \in B \quad \text{i} \quad \mathrm{u}_h(\mathrm{x}) = \mathrm{u}^*, \quad \mathrm{x} \in \partial B_d, \quad \mathrm{u}_h \in \mathcal{U}_h \subset C_h(B).$$

Metoda Rayleigha-Ritza (R-R), **tok postępowania**

c) Zakłada się (w R–R) **jednorodne warunki brzegowe** (kinematyczne) tj. $\mathrm{u} = \mathrm{u}_h = \mathrm{u}^* = \delta\mathrm{u} \equiv 0$ wzdłuż ∂B_d. Pozwala to na przyjęcie tej samej bazy aproksymacyjnej dla przemieszczeń wirtualnych

$$\delta\mathrm{u}_h(\mathrm{x}) = \sum_{a=1}^{N} \mathrm{h}_a(\mathrm{x})\delta\mathrm{a}_a = \mathrm{h}(\mathrm{x})\delta\mathrm{a}, \quad \mathrm{x} \in B \quad \text{i} \quad \delta\mathrm{u}_h(\mathrm{x}) = 0, \quad \mathrm{x} \in \partial B_d, \qquad \delta\mathrm{u}_h \in T_{\mathrm{u}_h}\mathcal{U}_h.$$

d) Podstawienie postulowanej postaci rozwiązania do funkcjonału $G : \mathcal{U} \times T_{\mathrm{u}}\mathcal{U} \to \text{Ń}$

$$G[\mathrm{u}_h;\delta\mathrm{u}_h] \equiv G[\mathrm{a};\delta\mathrm{a}] = \int_B (\mathrm{Dh}\delta\mathrm{a})^{\mathrm{T}}\mathrm{E}(\mathrm{Dha})dV - \left(\int_B (\mathrm{h}\delta\mathrm{a})^{\mathrm{T}}\mathrm{f}dV + \int_{\partial B_f}(\mathrm{h}\delta\mathrm{a})^{\mathrm{T}}\mathrm{t}^* dA\right)$$

$$= \delta\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\Big[\underbrace{\left[\int_B \mathrm{h}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}^{\mathrm{T}}\mathrm{EDh}dV\right]}_{\mathrm{K}}\mathrm{a} - \underbrace{\left(\int_B \mathrm{h}^{\mathrm{T}}\mathrm{f}dV + \int_{\partial B_f}\mathrm{h}^{\mathrm{T}}\mathrm{t}^* dA\right)}_{\mathrm{r}}\Big] = \delta\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\big[\mathrm{Ka} - \mathrm{r}\big].$$

e) Warunek $G[\mathrm{a};\delta\mathrm{a}] = 0$ wobec dowolności $\delta\mathrm{a}$, a więc dla każdego $\delta\mathrm{a} \neq 0$, prowadzi do układu $h = 3N$ równań algebraicznych względem parametrów a

$$G[\mathrm{a};\delta\mathrm{a}] = \delta\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\big[\mathrm{Ka} - \mathrm{r}\big] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ka} = \mathrm{r}.$$

f) Wyznaczenie poszukiwanego rozwiązania przybliżonego

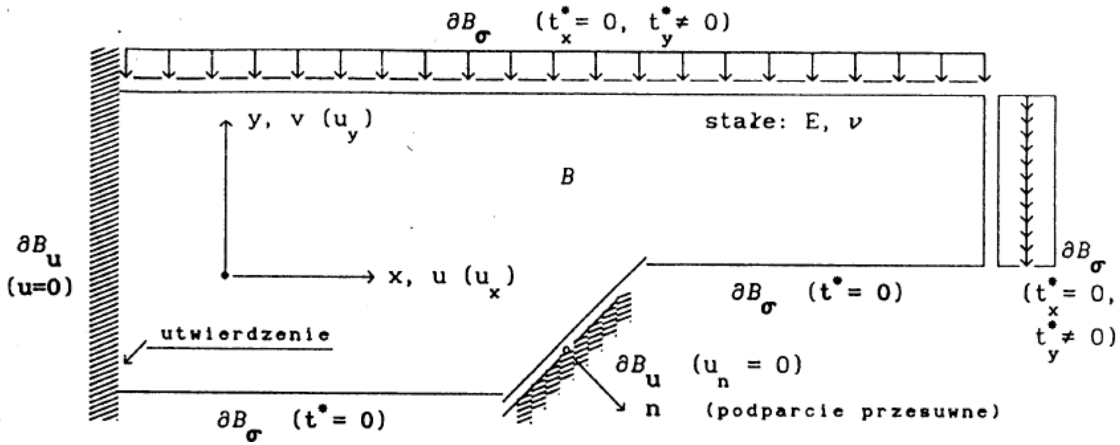
$$\mathrm{a} = \mathrm{K}^{-1}\mathrm{r} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{u}_h(\mathrm{x}) = \mathrm{h}(\mathrm{x})\mathrm{a} = \mathrm{h}(\mathrm{x})\mathrm{K}^{-1}\mathrm{r}.$$

Problemy związane ze stosowaniem metody Rayleigha–Ritza:

a) **Dobór funkcji aproksymujących** rozwiązanie w całym obszarze $x \in B$. Funkcje te musza nie tylko spełniać warunki brzegowe, ale także **umożliwiać opis wszystkich charakterystyk zadania** np.: geometrii układu, stałych materiałowych itp.

Efektywne generowanie φ_n w zagadnieniach praktycznych jest bardzo uciążliwe.

Na przykład, jakie funkcje przyjąć do opisu geometrii następującego zadania?

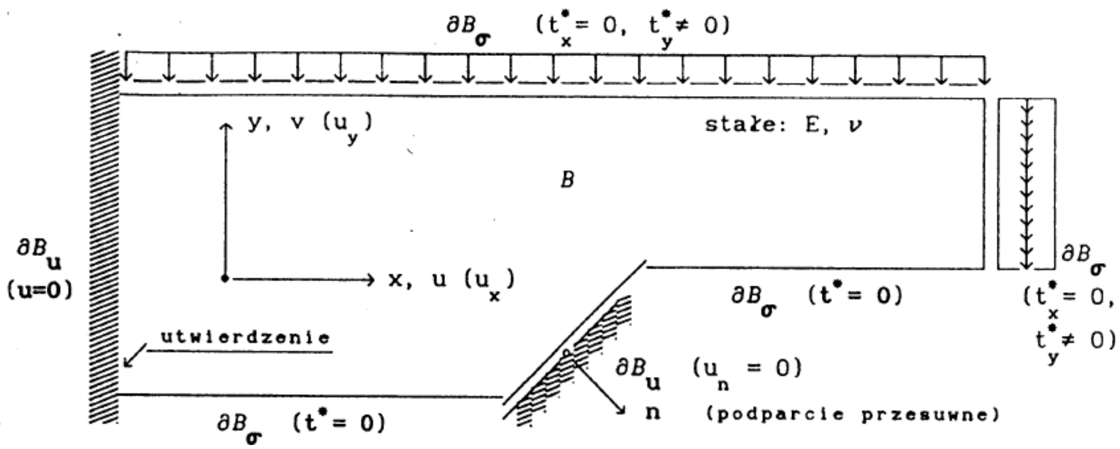


b) **Całkowanie** wielomianów aproksymujących wysokich rzędów jest **uciążliwe**.

c) **Brak przesłanek**, jakie **funkcje aproksymujące** należy dodać, aby **poprawić dokładność** rozwiązania.

Problemy związane ze stosowaniem metody Rayleigha–Ritza:

a) **Dobór funkcji aproksymujących** rozwiązanie w całym obszarze $x \in B$. Funkcje te musza nie tylko spełniać warunki brzegowe, ale także **umożliwiać opis wszystkich charakterystyk zadania** np.: geometrii układu, stałych materiałowych itp.
Efektywne generowanie φ_n w zagadnieniach praktycznych jest bardzo uciążliwe.
Na przykład, jakie funkcje przyjąć do opisu geometrii następującego zadania?



b) **Całkowanie** wielomianów aproksymujących wysokich rzędów jest **uciążliwe**.

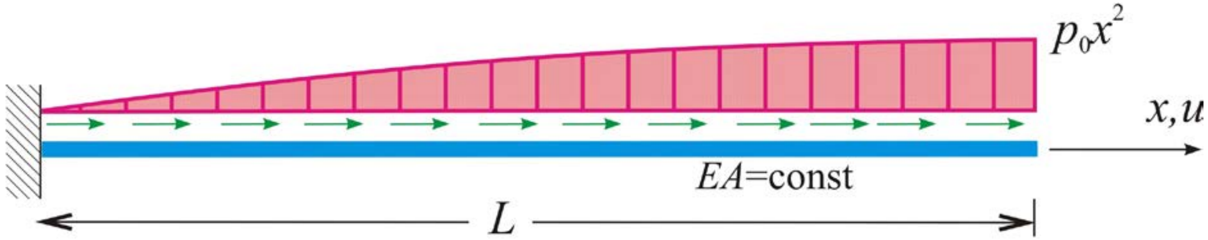
c) **Brak przesłanek**, jakie **funkcje aproksymujące** należy dodać, aby **poprawić dokładność** rozwiązania.

d) **Trudności z interpretacją współrzędnych uogólnionych**, które **nie mają czytelnej interpretacji fizycznej**.

Przykład

Pręt wspornikowy, o stałym przekroju poprzecznym obciążony stycznym obciążeniem o rozkładzie parabolicznym.

Dane: $EA = 1000,\ L = 5,\ p_0 = 1.$



Specyfikacja macierzy zadania:

$$\mathrm{u}(x) = \{u(x)\},\quad x \in B; \qquad \mathrm{f}(x) = \{f(x)\} = p_0\{x^2\},\quad x \in B;$$

$$\mathrm{u}^*(x) = \{u^*(x)\},\quad x \in \partial B_d \ \Rightarrow\ u^*|_{x=0} = 0; \qquad \mathrm{t}^*(x) = \{t^*(x)\},\quad x \in \partial B_f \ \Rightarrow\ t^*|_{x=5} = 0;$$

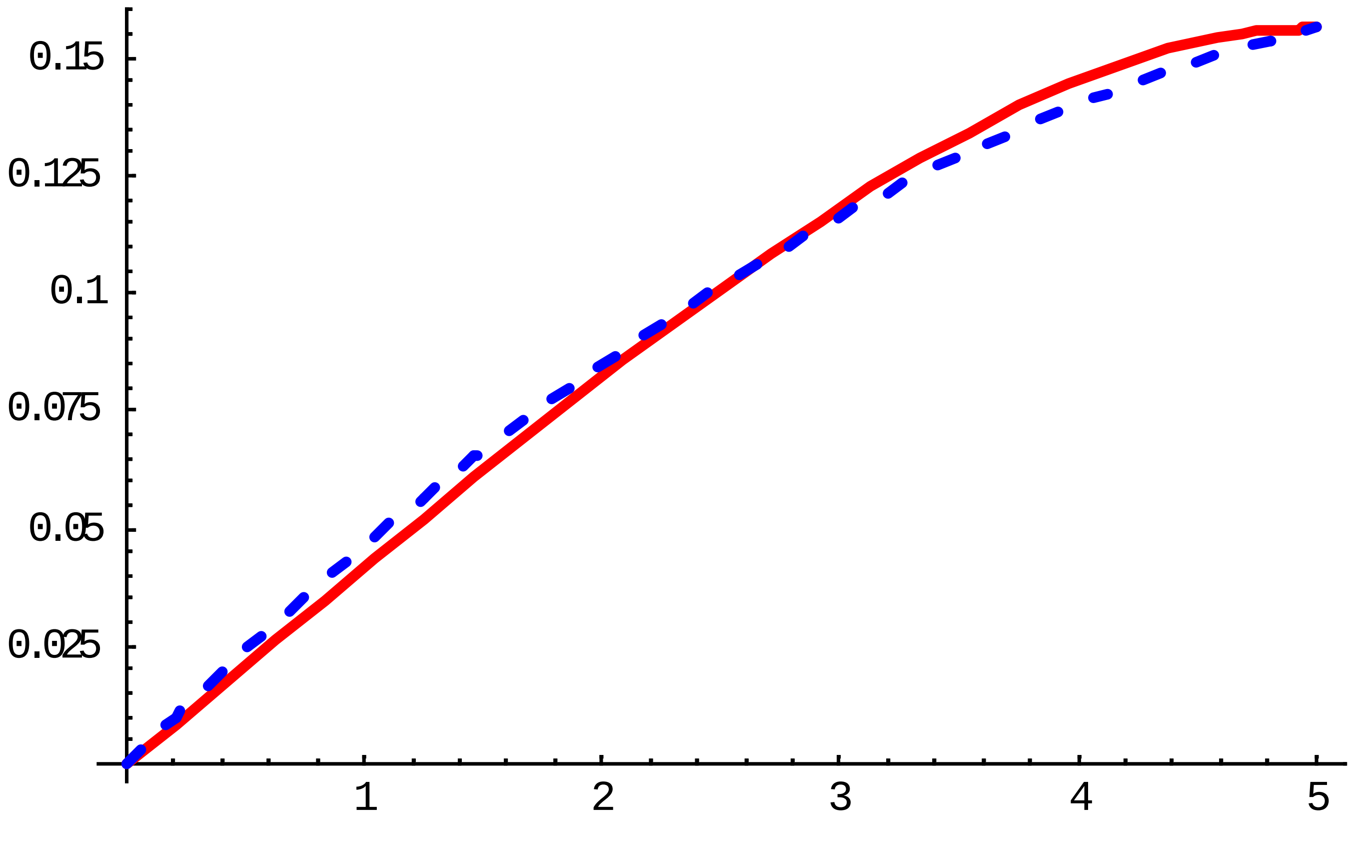
$$\mathrm{D} = \mathrm{D}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right], \quad \mathrm{E} = EA, \quad \mathrm{K} = EA\int_0^L (\mathrm{D}\mathrm{h})^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\mathrm{h}\,dV, \quad \mathrm{r} = \int_0^L \mathrm{h}^{\mathrm{T}}\mathrm{f}\,dA + \int_0^L \mathrm{h}^{\mathrm{T}}\mathrm{t}^*\,dA$$

Rozwiązań: poszukujemy przyjmując (arbitralnie) funkcje bazowe w postaci x^n.
Rozpatrujemy dwa przypadki macierzy $\mathrm{h}(x)$:

$$\mathrm{h}(x) = [x^1\ x^2],\quad \mathrm{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{h}(x) = [x^1\ x^2\ x^3],\quad \mathrm{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}.$$

Rozwiązanie z $\mathrm{h}(x)=[x^1\ x^2]$

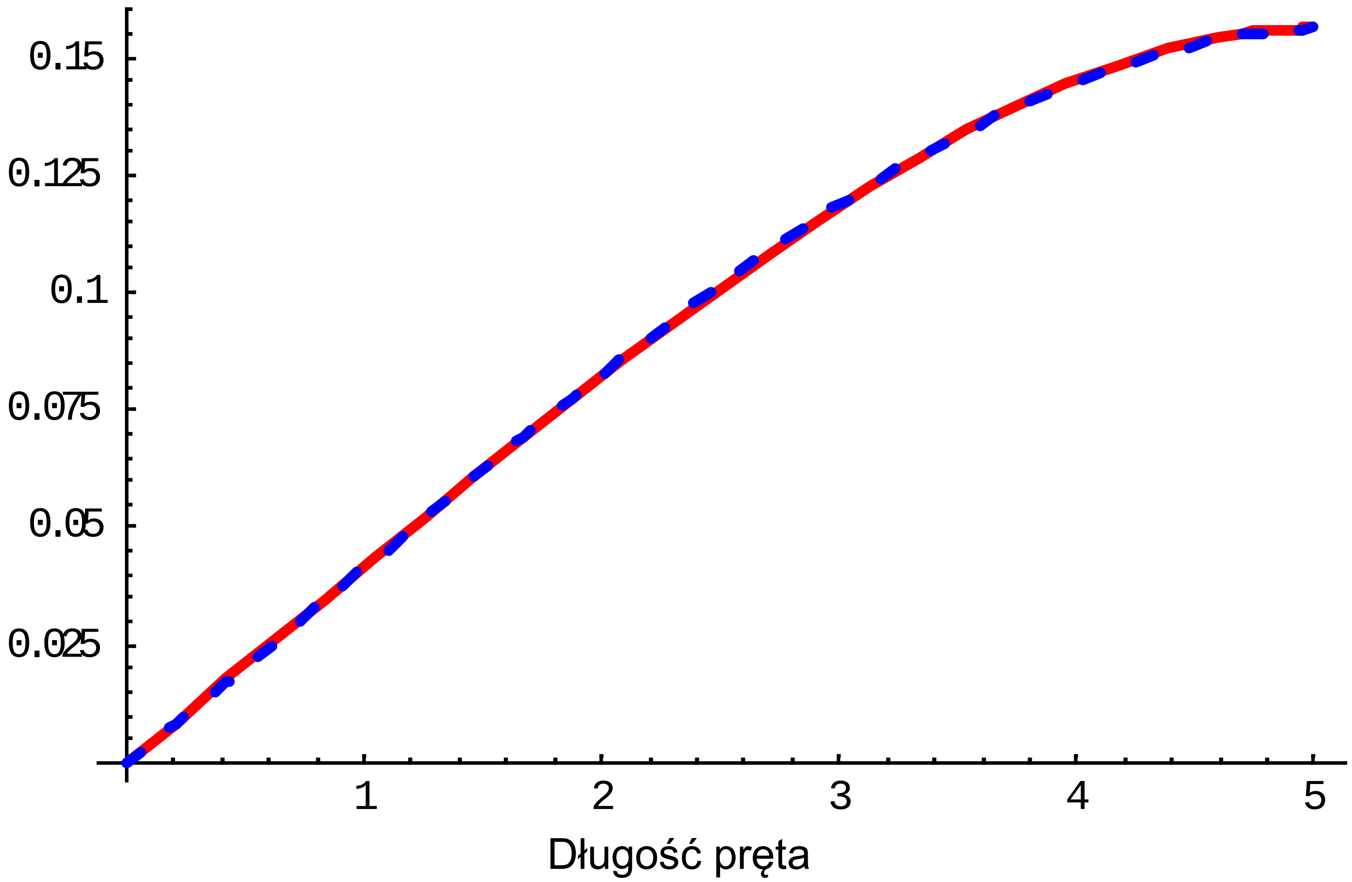
Rozwiązanie analityczne



$u_{aproks}(x=1)=0.04625$, $u_{analit}(x=1)=0.0415833$

Rozwiązanie z $h(x)=[x^1\ x^2\ x^3]$

Rozwiązanie analityczne



$u_{aproks}(x=1)=0.04125$, $u_{analit}(x=1)=0.0415833$

Dziękuję za uwagę

cdn.

J. Chróścielewski, W. Witkowski
Katedra Wytrzymałości Materiałów